**63. ročník Matematickej olympiády**
**2013/2014** *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

**1.** *Každému vrcholu pravidelného 63-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo $-1$. Ku každej jeho strane pripíšeme súčin čísel v jej vrcholoch a všetky čísla pri jednotlivých stranách sčítame. Nájdite najmenšiu možnú nezápornú hodnotu takého súčtu.*
(*Pavel Calábek*)

**Riešenie.** Označme $S$ skúmanú hodnotu, t. j. súčet čísel na stranách 63-uholníka. Ak priradíme každému vrcholu 63-uholníka číslo 1, dostaneme $S = 63$, pretože ku každej jeho strane bude pripísané číslo 1. Pritom je zrejmé, že ku každému zvolenému očíslovaniu vrcholov možno dôjsť postupnou zmenou 1 na $-1$.

Teraz skúmajme, ako sa bude meniť hodnota $S$, keď zmeníme hodnotu v niektorom vrchole 63-uholníka z 1 na $-1$. Hodnoty v susedných vrcholoch označme $a$ a $b$ (na ich poradí nezáleží). Spravenou zmenou zrejme zmeníme zodpovedajúce čísla na dvoch stranách, ktoré z tohto vrcholu vychádzajú (a na žiadnych iných). Pri výpočte hodnoty $S$ sa tak zmenia hodnoty práve dvoch sčítancov.

Ak $a = b = 1$, zmenší sa súčet $S$ o 4 (pred zmenou prispievali čísla $a$, $b$ hodnotou $a+b = 1\cdot 1+1\cdot 1 = 2$ a po zmene bude ich príspevok $1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 = -2$). Podobne rozoberieme aj ostatné možnosti:

| $a$ | $b$ | zmena $a+b$ | rozdiel v hodnote $S$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $2 \to -2$ | $-4$ |
| 1 | $-1$ | $0 \to 0$ | 0 |
| $-1$ | 1 | $0 \to 0$ | 0 |
| $-1$ | $-1$ | $-2 \to 2$ | 4 |

Vidíme teda, že zmena jedného čísla vo vrchole nemení zvyšok čísla $S$ po delení štyrmi. V úvode sme zistili, že jedna z dosiahnuteľných hodnôt je $S = 63$, ktorá dáva po delení štyrmi zvyšok 3, preto aj najmenšia nezáporná hodnota musí dávať rovnaký zvyšok 3, takže najmenšiu možnú hodnotu súčtu $S$ budeme hľadať medzi číslami $\{3, 7, 11, \dots\}$.

Ako sa ľahko presvedčíme, dá sa dosiahnuť hodnota $S = 3$: stačí do vrcholov 63-uholníka umiestniť nasledujúcich 63 čísel v uvedenom poradí

$$\underbrace{1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, \dots, 1, 1, -1, -1}_{\text{60 čísel}}, 1, 1, 1$$

a dostaneme $S = 3$. Ten istý súčet možno dosiahnuť aj inou voľbou čísel.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Do vrcholov pravidelného 63-uholníka vpíšeme ľubovoľným spôsobom 32 jednotiek a 31 núl, pričom do každého vrcholu vpíšeme jedno číslo. Ku každej jeho strane pripíšeme súčin čísel v jej vrcholoch a všetky čísla pri jednotlivých stranách sčítame. Nájdite najmenšiu hodnotu, ktorú môže nadobúdať tento súčet. [Súčet je nezáporný, a keďže jednotiek je viac ako núl, na obvode budú vedľa seba aspoň dve jednotky, preto je každý súčet aspoň 1 a takýto súčet možno dosiahnuť pravidelným striedaním čísel 1 a 0 vo vrcholoch strán: začneme v ľubovoľnom vrchole jednotkou a skončíme jednotkou v susednom vrcholu z opačnej strany.]

N2. Každému vrcholu pravidelného $n$-uholníka priradíme číslo $-1$. V jednom kroku je dovolené zmeniť dve susedné čísla na opačné. Zistite, pre aké hodnoty $n$ je možné opakovaním krokov dosiahnuť, aby boli všetky čísla +1. [Pre parné $n$ to je možné, pre nepárne $n$ to možné nie je. Pri zmene dvoch čísel sa nezmení zvyšok súčtu všetkých čísel po delení štyrmi a rozdiel medzi súčtom všetkých čísel v požadovanej a v počiatočnej pozícii je $2n$.]

D1. Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre očíslovanie stien kocky na začiatku, aby po konečnom počte vhodných krokov mohli byť na všetkých stenách kocky rovnaké čísla. [60–A–I–5]

D2. V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť: a) na 8 kôpok po 251 minciach, b) na 251 kôpok po 8 minciach. [58–A–I–5]

D3. V každom z vrcholov pravidelného $n$-uholníka $A_1A_2\dots A_n$ leží určitý počet mincí: vo vrchole $A_k$ je to práve $k$ mincí, $1 \leqq k \leqq n$. Vyberieme dve mince a preložíme každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, pre ktoré $n$ možno po konečnom počte takých preložení dosiahnuť, že pre ľubovoľné $k$, $1 \leqq k \leqq n$, bude vo vrchole $A_k$ ležať $n+1-$ $-\,k$ mincí. [58–A–III–5]

---

**2.** *Určte všetky dvojice $(x, y)$ reálnych čísel, pre ktoré platí nerovnosť*

$$(x+y)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big) \geqq \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

**Riešenie.** Zrejme $x$ ani $y$ nesmie byť nula, pretože sa nachádzajú v menovateli zlomkov v zadanej nerovnici. V zadaní nie je zmienka o znamienku čísel $x$ a $y$, preto nesmieme pri úpravách zabúdať na to, že tieto čísla môžu byť aj záporné.

Pokúsime sa najskôr zjednodušiť výrazy v zadaní. Prenásobením nerovnice kladným číslom $x^2y^2$ sa ekvivalentne zbavíme menovateľov:

$$\begin{aligned}(x+y)\frac{x+y}{xy} &\geqq \left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right)^2, \qquad \Big|\cdot x^2y^2\\ xy(x+y)^2 &\geqq (x^2+y^2)^2.\end{aligned}$$

Teraz je vidno, že roznásobením výrazov v získanej nerovnici dostaneme člen $2x^2y^2$ na oboch stranách – ten v prvom kroku zrušíme a nerovnicu ďalej upravíme na súčinový tvar:

$$\begin{aligned}x^3y+2x^2y^2+xy^3 &\geqq x^4+2x^2y^2+y^4,\\ x^3y+xy^3 &\geqq x^4+y^4,\\ 0 &\geqq x^4-x^3y+y^4-xy^3,\\ 0 &\geqq x^3(x-y)-y^3(x-y),\\ 0 &\geqq (x^3-y^3)(x-y).\end{aligned}\tag{1}$$

Na pravej strane poslednej nerovnice máme súčin dvoch dvojčlenov, a keďže ho porovnávame s nulou, stačí skúmať znamienka jednotlivých zátvoriek.

Ak $x \geqq y$, je aj $x^3 \geqq y^3$ a podobne pre $x \leqq y$ platí, že $x^3 \leqq y^3$ (je to dôsledok toho, že funkcia tretej mocniny je na celom obore reálnych čísel rastúca). Výrazy v zátvorkách majú teda rovnaké znamienka pre ľubovoľné hodnoty $x$ a $y$, preto platí opačná nerovnosť $(x^3-y^3)(x-y) \geqq 0$. Nerovnica (1) tak môže byť splnená iba v prípade, keď je jedna zo zátvoriek nulová. Rovnice $x=y$ a $x^3=y^3$ sú ekvivalentné, a preto nerovnosť (1) platí práve vtedy, keď $x=y$.

Riešením sú všetky dvojice reálnych čísel $(x,y)$, kde $x=y\neq 0$. Pri úpravách sme použili iba ekvivalentné úpravy, preto nie je skúška správnosti nutná.

*Poznámka.* Súčin na pravej strane (1) sme mohli upraviť aj pomocou vzorca $x^3-y^3= (x-y)(x^2+xy+y^2)$ na súčin dvoch nezáporných mnohočlenov:

$$(x^3-y^3)(x-y)=(x-y)^2(x^2+xy+y^2).$$

Trojčlen v druhej zátvorke má totiž ako kvadratická funkcia jednej neznámej (napr. $x$) pre ľubovoľné $y$ nekladný diskriminant $D(y)=y^2-4y^2=-3y^2\leqq 0$. Preto rovnosť $x^2+xy+y^2=0$ nastane iba v prípade $x=y=0$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojice $(x,y)$ kladných reálnych čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $x/y+ + y/x \leqq 2$. [Po odstránení zlomkov upravíme nerovnicu na $(x-y)^2\leqq 0$, ktorá platí len pre $x=y$.]

N2. Určte všetky dvojice $(x,y)$ reálnych čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $x/y+y/x\leqq 2$. [Riešením sú všetky dvojice $(x,y)$ také, že $x=y\neq 0$ alebo $xy<0$.]

N3. Určte všetky dvojice $(x,y)$ reálnych čísel, ktoré vyhovujú nerovnici $x^2+4y^2\leqq 4xy$. [Riešením sú všetky dvojice $(x,y)$ také, že $x=2y$.]

N4. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla $x$, $y$ platí nerovnosť $x^4+y^4\geqq x^3y+xy^3$. [Úprava na súčin.]

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla $a$, $b$ platí nerovnosť

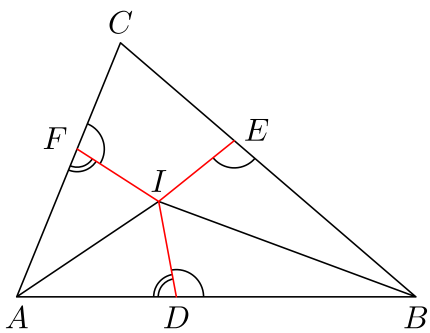
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\leqq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}.$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť. [49–A–II–3]

---

**3.** *Nech $D$ je ľubovoľný vnútorný bod strany $AB$ trojuholníka $ABC$. Na polpriamkach $BC$ a $AC$ zvoľme postupne body $E$ a $F$ tak, aby platilo $|BD|=|BE|$ a $|AD|=|AF|$. Dokážte, že body $C$, $E$, $F$ a stred $I$ kružnice vpísanej trojuholníku $ABC$ ležia na jednej kružnici.* (Jaroslav Švrček)

**Riešenie.** Ak niektorý z takto zostrojených bodov $E$ a $F$ splynie s vrcholom $C$, je tvrdenie úlohy triviálne. Ďalej teda budeme mlčky predpokladať, že to tak nie je a že používané uhly majú zmysel.




Obr. 1

Najskôr predpokladajme, že body $E$ a $F$ ležia postupne na *úsečkách* $BC$ a $AC$. Keďže $|BD| = |BE|$ a bod $I$ leží na osi uhla $ABC$, sú trojuholníky $DBI$ a $EBI$ zhodné podľa vety *sus*. Podobne to platí aj pre trojuholníky $DAI$ a $FAI$, a preto platí (obr. 1)

$$|\measuredangle IDB| = |\measuredangle IEB| \quad \text{a} \quad |\measuredangle IFA| = |\measuredangle IDA|. \tag{1}$$

Tvrdenie úlohy, že body $C$, $E$, $F$ a $I$ ležia na jednej kružnici, je v takom prípade ekvivalentné s tým, že súčet veľkostí uhlov $CFI$ a $CEI$ je $180°$. S využitím rovností (1) dostávame

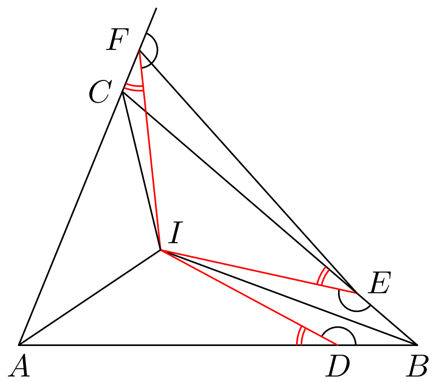
$$|\measuredangle CFI| = 180° - |\measuredangle IFA| = 180° - |\measuredangle IDA| = |\measuredangle IDB| = |\measuredangle IEB| = 180° - |\measuredangle CEI|,$$

teda súčet protiľahlých uhlov v štvoruholníku $CFIE$ je naozaj $180°$.

Ak je jeden z bodov $E$, $F$ vnútorným a druhý vonkajším bodom strán $BC$ a $AC$, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že bod $E$ leží na úsečke $BC$ a bod $F$ leží na polpriamke opačnej k polpriamke $CA$. Pre takú polohu bodov $C$, $E$, $F$ a $I$ nám stačí ukázať rovnosť uhlov $IFC$ a $IEC$. Znova využijeme rovnosti (1) a dostaneme podobne (obr. 2)

$$|\measuredangle IFC| = |\measuredangle IFA| = |\measuredangle IDA| = 180° - |\measuredangle IDB| = 180° - |\measuredangle IEB| = |\measuredangle IEC|,$$

odkiaľ vyplýva, že uhly $IFC$ a $IEC$ sú zhodné.




Obr. 2

Tretia možnosť, že by oba body $E$ aj $F$ ležali zvonka prislúchajúcich strán trojuholníka $ABC$, zrejme nemôže nastať. V tom prípade by totiž muselo pre jednotlivé dĺžky platiť

$$|AB| = |AD| + |BD| = |BE| + |AF| \geqq |BC| + |AC|,$$

čo odporuje trojuholníkovej nerovnosti pre strany trojuholníka $ABC$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Označme $I$ stred kružnice vpísanej do trojuholníka $ABC$ a $K$, $L$, $M$ postupne jej body dotyku so stranami $BC$, $AC$, $AB$. Dokážte, že štvoruholníky $AMILO$, $BKIM$ a $CLIK$ sú tetivové. [Štvoruholníky majú dva protiľahlé uhly pravé.]

N2. Označme $I$ stred kružnice vpísanej do trojuholníka $ABC$ a $K$, $L$, $M$ postupne jej body dotyku so stranami $BC$, $AC$, $AB$. Dokážte, že štvoruholníky $AMILO$, $BKIM$ a $CLIK$ sú deltoidy. [Osi vnútorných uhlov trojuholníka $ABC$ delia každý štvoruholník na dva zhodné pravouhlé trojuholníky.]

N3. Dané kružnice $k$ a $l$ sa pretínajú v dvoch bodoch $B$ a $C$. Priamka $p$ sa dotýka kružnice $k$ v bode $A$. Priamky $AB$ a $AC$ pretínajú kružnicu $l$ postupne v bodoch $D \neq B$ a $E \neq \neq C$. Dokážte, že priamky $p$ a $DE$ sú rovnobežné. [Využite úsekový uhol pri vrchole $A$ a obvodové uhly pri vrcholoch $C$ a $D$ nad tetivou $BE$. Je treba dôsledne rozobrať všetky rôzne polohy bodov $B$, $C$, $D$ a $E$ na kružnici $l$.]

D1. Nech $P$ je bod na strane $BC$ trojuholníka $ABC$. Skonštruujme postupne tieto body: $Q$ na strane $AB$ tak, aby $|BQ| = |BP|$, $R$ na strane $AC$ tak, aby $|AR| = |AQ|$, $P'$ na strane $BC$ tak, aby $|CP'| = |CR|$, $Q'$ na strane $AB$ tak, aby $|BQ'| = |BP'|$, $R'$ na strane $AC$ tak, aby $|AR'| = |AQ'|$. Dokážte, že $|CP| = |CR'|$, a to, že body $P$, $Q$, $R$, $P'$, $Q'$ a $R'$ ležia na jednej kružnici. [Z voľby jednotlivých bodov vyplývajú pre stred $I$ kružnice vpísanej rovnosti $|IP| = |IQ| = |IR| = |IP'| = |IQ'| = |IR'|$, takže všetky uvedené body ležia na kružnici so stredom $I$. A keďže $CI$ je osou rovnoramenného trojuholníka $PIR'$, je aj trojuholník $CPR'$ rovnoramenný, takže $|CP| = |CR'|$.]

---

**4.** *Dana napísala na papier trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok* 2. *Prehodením prvých dvoch cifier vzniklo trojciferné číslo, ktoré po delení siedmimi dáva zvyšok* 3. *Číslo, ktoré vznikne prehodením posledných dvoch cifier pôvodného čísla, dáva po delení siedmimi zvyšok* 5. *Aký zvyšok po delení siedmimi bude mať číslo, ktoré vznikne prehodením prvej a poslednej cifry Daninho čísla?* (Pavel Novotný)

**Riešenie.** Označme cifry Daninho čísla postupne $a$, $b$, $c$. Informáciu o zvyškoch po delení siedmimi zo zadania môžeme prepísať na rovnice

$$100a + 10b + c = 7x + 2, \tag{1}$$
$$100b + 10a + c = 7y + 3, \tag{2}$$
$$100a + 10c + b = 7z + 5. \tag{3}$$

Cifry $a$ a $b$ nesmú byť nulové, pretože ako prvé, tak aj druhé číslo v zadaní je trojciferné; preto $a, b \in \{1, 2, \dots, 9\}$, $c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ a $x$, $y$ a $z$ sú celé čísla.

Teraz sa pokúsime postupne zistiť zvyšok cifier $a$, $b$, $c$ po delení siedmimi. To nám dá pre samotné cifry nanajvýš dve možnosti. Keď sa pozrieme na koeficienty v rovniciach (1) – (3), vidíme, že vhodným odčítaním sa dokážeme zbaviť dvoch cifier $a$ aj $c$ naraz – keď od desaťnásobku rovnice (2) odčítame rovnicu (3). Výsledok postupne upravíme tak, aby sme zistili zvyšok cifry $b$ po delení siedmimi:

$$\begin{aligned}
10(100b + 10a + c) - (100a + 10c + b) &= 10(7y + 3) - (7z + 5),\\
999b &= 70y - 7z + 25,\\
5b &= 70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3 + 4,\\
15b &= 3\,(70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3) + 3 \cdot 4,\\
b &= 3\,(70y - 7z - 7 \cdot 142b + 7 \cdot 3) - 7 \cdot 2b + 12.
\end{aligned}$$

Keďže na pravej strane v poslednej rovnici sú všetky členy okrem čísla 12 deliteľné siedmimi, dáva $b$ rovnaký zvyšok po delení siedmimi ako číslo 12, a jediná vyhovujúce cifra $b$ je tak $b = 5$.

Odčítaním rovníc (3) a (1) dostaneme rovnicu $9c - 9b = 7(z - x) + 3$, odkiaľ po dosadení $b = 5$ dostávame

$$\begin{aligned}
9c - 9 \cdot 5 &= 7(z - x) + 3,\\
2c &= 7\,(z - x - c) + 48,\\
8c &= 4 \cdot 7(z - x - c + 6) + 4 \cdot 6,\\
c &= 4 \cdot 7(z - x - c + 6) - 7c + 7 \cdot 3 + 3.
\end{aligned}$$

Z deliteľnosti jednotlivých členov siedmimi tak dostávame $c = 3$.

Nakoniec dosadením $b = 5$ a $c = 3$ napríklad do prvej rovnice ľahko dopočítame hodnotu $a$:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 7x + 2, \\ 100a + 53 &= 7x + 2 \qquad (53 = 7 \cdot 8 - 3,\ 98 = 7 \cdot 14), \\ 2a &= 7x + 2 - 7 \cdot 8 + 3 - 7 \cdot 14a, \\ a &= 4(7x - 7 \cdot 8 - 7 \cdot 14a) + 4 \cdot 5 - 7a, \end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva, že cifra $a$ dáva rovnaký zvyšok po delení siedmimi ako číslo $20 = 7 \cdot 2 + 6$, a preto $a = 6$.

Dana teda napísala na papier číslo 653, takže číslo vzniknuté prehodením prvej a poslednej cifry je $356 = 7 \cdot 50 + 6$ a dáva po delení siedmimi zvyšok 6.

**Iné riešenie.** Predošlé riešenie môžeme zapísať prehľadnejšie pomocou kongruencií.[1] Hovoríme, že dve prirodzené čísla $k$ a $l$ sú kongruentné modulo $m$, ak dávajú po delení číslom $m$ rovnaký zvyšok, t. j. ak je číslo $k - l$ deliteľné číslom $m$. Uvedenú kongruenciu zapisujeme ako $k \equiv l \pmod{m}$.

Teraz pri rovnakom označení ako v prvom riešení môžeme rovnice (1) – (3) s využitím vzťahov $100x \equiv 2x \pmod 7$ a $10x \equiv 3x \pmod 7$ zapísať ako

$$(100a + 10b + c \equiv)\quad 2a + 3b + c \equiv 2 \pmod 7, \tag{4}$$
$$(100b + 10a + c \equiv)\quad 2b + 3a + c \equiv 3 \pmod 7, \tag{5}$$
$$(100a + 10c + b \equiv)\quad 2a + 3c + b \equiv 5 \pmod 7. \tag{6}$$

S kongruenciami môžeme prevádzať podobné ekvivalentné úpravy ako s obyčajnými rovnicami – napríklad vynásobiť kongruenciu celým číslom alebo odčítať dve kongruencie. Budeme postupovať podobne ako v predošlom riešení a pokúsime sa získať kongruenciu iba pre cifru $b$. Od trojnásobku kongruencie (5) odčítame kongruenciu (6) a dostaneme

$$\begin{aligned} 3(2b + 3a + c) - (2a + 3c + b) &\equiv 3 \cdot 3 - 5 \pmod 7, \\ 5b &\equiv 4 \pmod 7, \qquad (7) \\ 15b &\equiv 12 \pmod 7, \\ b &\equiv 5 \pmod 7, \end{aligned}$$

odkiaľ máme $b = 5$, pretože to je jediná cifra dávajúca zvyšok 5 po delení siedmimi. Kongruenciu (7) sme vynásobili tromi, aby sme na ľavej strane dostali číslo, ktoré je kongruentné s 1 modulo 7. Dá sa ukázať, že ak čísla $k$ a $m$ sú nesúdeliteľné, existuje vždy násobok čísla $k$, ktorý je kongruentný s 1 modulo $m$.

[1] Využijeme pritom iba základné vlastnosti kongruencií, ktoré v texte spomenieme bez dôkazu. Ďalšími zdrojmi pre štúdium tejto problematiky môžu byť napr. Alois Apfelbeck: *Kongruence*, ŠMM č. 21, alebo dokumenty
`thales.doa.fmph.uniba.sk/cincura/public/Element%20-teoria%20-cisel.pdf` či
`mks.mff.cuni.cz/library/KongruenceMS/KongruenceMS.pdf`

Odčítaním kongruencií (6) a (4) dostaneme

$$\begin{aligned}(2a+3c+b)-(2a+3b+c)&\equiv 5-2 \pmod 7,\\ 2c&\equiv 3+2b \pmod 7\end{aligned}$$

a po dosadení $b=5$ vyjde

$$\begin{aligned}2c&\equiv 13\equiv 6 \pmod 7,\\ 8c&\equiv 24 \pmod 7,\\ c&\equiv 3 \pmod 7.\end{aligned}$$

Jediná cifra dávajúca zvyšok 3 po delení siedmimi je $c=3$, pričom sme prvú kongruenciu vynásobili číslom 4, aby sme dostali $2\cdot 4=8\equiv 1 \pmod 7$. Nakoniec dosadením $b=5$ a $c=3$ napríklad do štvornásobku kongruencie (4) dostaneme

$$\begin{aligned}4(2a+3b+c)&\equiv 4\cdot 2 \pmod 7,\\ 8a+12b+4c&\equiv 1 \pmod 7,\\ a+5b+4c&\equiv 1 \pmod 7,\\ a+25+12&\equiv 1 \pmod 7,\\ a&\equiv 6 \pmod 7.\end{aligned}$$

riešením sústavy kongruencií sme dospeli k rovnakej trojici cifier $a$, $b$, $c$ ako v predošlom riešení so sústavou rovníc.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pri delení číslom 99 je zvyšok ľubovoľného trojciferného čísla rovnaký ako zvyšok čísla, ktoré vznikne z pôvodného čísla čítaním odzadu. Presvedčte sa! [$(100a+10b+10c)-$ $-(100c+10b+a)=99(a-c)$)]

N2. Dokážte, že čísla $\overline{aba}$ a $\overline{bab}$ dávajú rovnaký zvyšok po delení siedmimi. (Výraz $\overline{klm}$ označuje zápis trojciferného čísla s ciframi $k$, $l$, $m$ v desiatkovej sústave.) [$\overline{aba}-\overline{bab}=$ $=(101a+10b)-(101b+10a)=7\cdot 13(a-b)$]

N3. Isté štvorciferné prirodzené číslo je deliteľné siedmimi. Ak zapíšeme jeho číslice v opačnom poradí, dostaneme väčšie štvorciferné číslo, ktoré je tiež deliteľné siedmimi. Navyše po delení číslom 37 dávajú obe spomenuté štvorciferné čísla rovnaký zvyšok. Určte pôvodné štvorciferné číslo. [58–A–II–1]

D1. Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré začínalo rovnakou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice sa rovnali a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať? [57–C–I–6]

D2. Janko má tri kartičky, na každej je iná nenulová cifra. Súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré možno z týchto kartičiek zostaviť, je číslo o 6 väčšie ako trojnásobok jedného z nich. Aké cifry sú na kartičkách? [61–C–II–2]

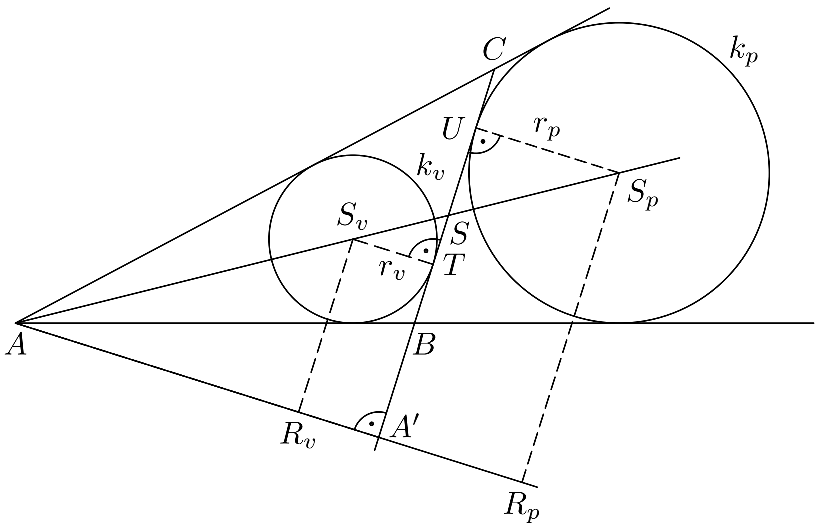
D3. Nájdite všetky štvormiestne čísla $\overline{abcd}$ (v desiatkovej sústave), pre ktoré platí rovnosť

$$\overline{abcd}+1=(\overline{ac}+1)(\overline{bd}+1).$$

[49–A–III–6]

**5.** *V rovine sú dané body $A$, $T$, $U$ tak, že uhol $ATU$ je tupý. Zostrojte trojuholník $ABC$, v ktorom $T$, $U$ sú postupne body dotyku strany $BC$ s kružnicou trojuholníku vpísanou a pripísanou. (Pripísanou kružnicou tu rozumieme kružnicu, ktorá sa okrem strany $BC$ dotýka aj polpriamok opačných k polpriamkam $BA$ a $CA$.)* (Šárka Gergelitsová)

**Riešenie.** Označme $k_v(S_v; r_v)$ kružnicu vpísanú do hľadaného trojuholníka $ABC$ a $k_p(S_p; r_p)$ kružnicu pripísanú k jeho strane $BC$. Stredy $S_v$ a $S_p$ ležia na osi uhla $BAC$, ktorej priesečník so stranou $BC$ ešte označíme $S$. Priamky $AB$, $AC$ a $BC$ sú spoločnými dotyčnicami kružníc $k_v$ a $k_p$, ktoré sú teda rovnoľahlé podľa stredov $A$ a $S$ (obr. 3). Bod $S$ je pritom stredom vnútornej rovnoľahlosti, v ktorej si zodpovedajú




Obr. 3

aj body $T$ a $U$ dotyku kružníc $k_v$ a $k_p$ s úsečkou $BC$. Podľa zadania je ale $T \neq U$ (predpokladá sa totiž existencia uhla $ATU$), takže stred $S$ vnútornej rovnoľahlosti kružníc $k_v$, $k_p$ je tým bodom úsečky $TU$, ktorý ju delí v pomere $r_v : r_p$, a ten je podľa vonkajšej rovnoľahlosti rovný pomeru $|AS_v| : |AS_p|$. Platí teda

$$\frac{|ST|}{|SU|} = \frac{|AS_v|}{|AS_p|}.$$

Označme teraz $A'$ kolmý priemet bodu $A$ na priamku $BC$ a $R_v$ a $R_p$ kolmé priemety stredov $S_v$ a $S_p$ na priamku $AA'$. Keďže $A$, $S_v$, $S$, $S_p$ je poradie bodov na jednej priamke, majú ich kolmé priemety na priamky $BC$ a $AA'$ poradie $A'$, $T$, $S$, $U$, respektíve $A$, $R_v$, $A'$, $R_p$ (obr. 3).[2] Z pravouholníkov $S_vR_vA'T$ a $S_pR_pA'U$ zrejme vyplýva

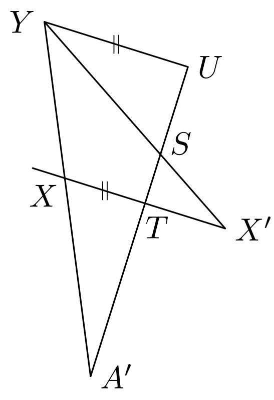
$$\frac{|A'T|}{|A'U|} = \frac{|R_vS_v|}{|R_pS_p|} = \frac{|AS_v|}{|AS_p|}.$$

Porovnaním odvodených rovností dostaneme úmeru $|ST| : |SU| = |A'T| : |A'U|$. Podľa nej neznámy bod $S$ delí zadanú úsečku $TU$ v pomere určenom bodom $A'$, ktorého

[2] Všimnime si, že z poradí bodov $A'$, $T$, $U$ a kolmosti $AA' \perp TU$ vyplýva, že uhol $ATU$ je tupý (bez tejto podmienky by úloha nemala riešenie).

polohu na polpriamke $UT$ zvonka úsečky $UT$ poznáme. A akonáhle zostrojíme bod $S$, môžeme zostrojiť aj stred $S_v$, ktorý leží na priamke $AS$ a na kolmici na priamku $TU$ vedenej bodom $T$. Vrcholy $B$ a $C$ potom získame ako priesečníky dotyčníc z vrcholu $A$ ku kružnici $k_v(S_v; r_v = |S_vT|)$ s priamkou $TU$.

Na zostrojenie bodu $S$ využijeme napr. nasledujúci postup (obr. 4): V polrovine



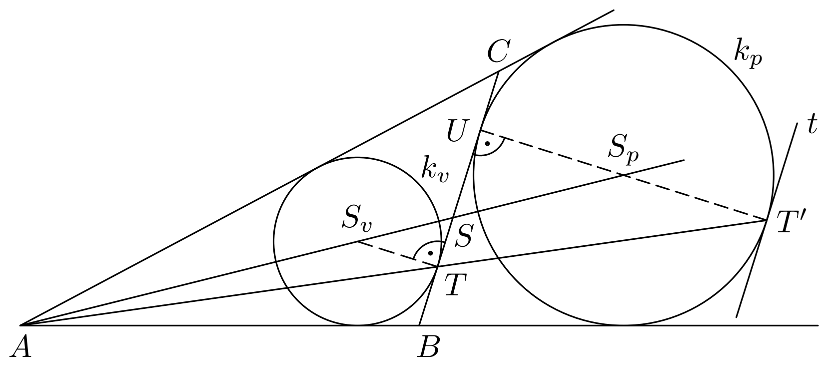

Obr. 4

$TUA$ zvoľme nejaký bod $Y$ a k nemu vnútri úsečky $A'Y$ zostrojme bod $X$ tak, aby úsečky $TX$, $UY$ boli rovnoľahlé podľa stredu $A'$. Označme $X'$ bod súmerne združený s bodom $X$ podľa stredu $T$. Priesečník priamok $TU$ a $X'Y$ je potom hľadaným bodom $S$, lebo je stredom rovnoľahlosti úsečiek $TX'$ a $UY$, takže podľa oboch spomenutých rovnoľahlostí platí

$$\frac{|ST|}{|SU|} = \frac{|TX'|}{|UY|} = \frac{|TX|}{|UY|} = \frac{|A'T|}{|A'U|}.$$

Vďaka podmienke tupého uhla $ATU$ padne bod $S_v$ vyššie uvedenou konštrukciou na priamku $AS$ do polohy medzi bodmi $A$ a $S$, teda celá úloha bude mať jediné riešenie (ak neberieme do úvahy možnosť vymeniť označenie vrcholov $B$ a $C$).

**Iné riešenie.** Použijeme rovnaké označenie ako v predošlom riešení. V rovnoľahlosti so stredom v bode $A$ a koeficientom $r_p/r_v$ sa bod $T \in k_v$ zobrazí na bod $T' \in$




Obr. 5

$\in k_p$ (obr. 5). Z vlastnosti použitej rovnoľahlosti vieme, že dotyčnica $t$ ku kružnici $k_p$ vedená bodom $T'$ je rovnobežná s dotyčnicou ku kružnici $k_v$ vedenou bodom $T$, čo je priamka $BC$. Priamka $S_pU$ je teda kolmá nielen na priamku $TU$, ale aj na dotyčnicu $t$, takže úsečka $T'U$ je priemerom kružnice $k_p$. Odtiaľ vyplýva nasledujúca *konštrukcia*:

1. Bod $T'$ je priesečníkom priamky $AT$ a kolmice z bodu $U$ na priamku $UT$. Keďže uhol $ATU$ je tupý, leží bod $T'$ v opačnej polrovine určenej priamkou $TU$ ako bod $A$.
2. Kružnica $k_p$ je kružnica s priemerom $UT'$.
3. Body $B$ a $C$ sú priesečníky dotyčníc z bodu $A$ ku kružnici $k_p$ s priamkou $TU$.

Úloha má jediné riešenie.

Návodné a doplňajúce úlohy:

Zopakujte si učebnicové poznatky o rovnoľahlosti dvoch kružníc a jej použití pri konštrukcii spoločných dotyčníc.

N1. Do pásu určeného dvoma rovnobežkami $p \parallel q$, $p \neq q$, vpíšme kružnicu tak, že sa dotýka oboch priamok. Dokážte, že polomer kružnice je polovicou vzdialenosti priamok $p$ a $q$. [Priemer kružnice, ktorý je kolmý na priamku $p$, má dĺžku rovnú vzdialenosti rovnobežiek $p$ a $q$.]

N2. Daný je trojuholník $ABC$. Dokážte, že bod $A$, stred kružnice trojuholníku $ABC$ vpísanej a stred kružnice pripísanej ku strane $BC$ ležia na jednej priamke. [Tá priamka je osou uhla $BAC$.]

N3. Na úsečke $AB$ zostrojte bod $X$ tak, aby platilo $|AX| : |BX| = p$, pričom $p > 0$ je dané číslo. [Na kolmici na priamku $AB$ bodom $A$ zostrojte bod $C$ tak, aby $|AC| = p$, a na kolmici na priamku $AB$ bodom $B$ zostrojte bod $D$ tak, aby $|BD| = 1$, pričom body $C$ a $D$ ležia v opačných polrovinách určených priamkou $AB$. Bod $X$ je priesečník $AB$ a $CD$.]

D1. Daný je lichobežník $ABCD$, $AB \parallel CD$. Dokážte, že priesečník $P$ jeho uhlopriečok $AC$ a $BD$ leží na spojnici stredov strán $AB$ a $CD$. [Priesečník uhlopriečok je stred rovnoľahlosti oboch základní, takže ich stredy si musia navzájom zodpovedať.]

D2. Označme $r$ polomer kružnice vpísanej trojuholníku $ABC$. Jej dotyčnice rovnobežné so stranami daného trojuholníka z neho vytínajú tri menšie podobné trojuholníky, polomery im vpísaných kružníc označíme $r_a$, $r_b$ a $r_c$. Dokážte rovnosť $r_a + r_b + r_c = r$. [Tibor Fonód, Milan Maxian: *Geometrické perličky*, úloha 3.10. Pri vhodnom označení polomerov bude príslušný pomer podobnosti $r_a/r = (v_a - 2r)/v_a$, pričom $v_a$ označuje veľkosť výšky trojuholníka $ABC$ na stranu $a$, a podobne pre strany $b$ a $c$. Požadovanú rovnosť potom dostaneme z nasledujúcich rovností pre obsah $S$ trojuholníka $ABC$: $2S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c = r(a + b + c)$.]

---

**6.** *Nájdite najmenšie reálne číslo $r$ také, že tyč s dĺžkou 1 možno rozlámať na štyri časti dĺžky nanajvýš $r$ tak, že sa zo žiadnych troch týchto častí nedá zložiť trojuholník.* (Ján Mazák)

**Riešenie.** Jediným kritériom, či dokážeme zostrojiť trojuholník so stranami daných dĺžok, je trojuholníková nerovnosť. Na zostrojenie trojuholníka stačí, aby *najväčšia dĺžka bola menšia ako súčet zvyšných dvoch.* Ak platí táto nerovnosť, platia aj ostatné trojuholníkové nerovnosti a trojuholník sa dá zostrojiť. Ak to neplatí, trojuholník sa zostrojiť nedá, pretože neplatí trojuholníková nerovnosť. *Trojuholník sa nedá z troch strán daných dĺžok zostrojiť práve vtedy, keď najväčšia dĺžka je aspoň taká ako súčet zvyšných dvoch.*

Predpokladajme, že $r$ je hľadané najmenšie číslo. To znamená, že vieme tyč rozlomiť na štyri časti dĺžky nanajvýš $r$ tak, že zo žiadnych troch týchto častí sa nedá zložiť trojuholník. Najdlhšia z častí musí mať dĺžku $r$, pretože inak by $r$ nebolo najmenšie číslo s požadovanou vlastnosťou. Dĺžky ostatných častí označme $x$, $y$, $z$ tak, že $x \leqq y \leqq z \leqq r$ a $x + y + z + r = 1$, a predpokladajme stále, že zo žiadnych troch takých častí sa nedá zostrojiť trojuholník, čo teraz vyjadríme príslušnými nerovnosťami.

Z trojice dĺžok $(x, y, z)$ nie je možné zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď $x + y \leqq z$. Keďže $z \leqq r$, vyplýva odtiaľ aj príslušná nerovnosť $x + y \leqq r$ pre trojicu $(x, y, r)$, takže ani z týchto troch dĺžok nie je možné zostrojiť trojuholník. Podobne pre trojicu dĺžok $(y, z, r)$ platí, že z nich nemožno zostrojiť trojuholník práve vtedy, keď $y + z \leqq r$, a keďže $x \leqq y$, vyplýva odtiaľ príslušná nerovnosť $x + z \leqq r$ aj pre trojicu dĺžok $(x, z, r)$.

Zo žiadnych troch častí teda nedokážeme zložiť trojuholník práve vtedy, keď budú okrem rovnosti $x + y + z + r = 1$ splnené aj obe podmienky

$$x + y \leqq z \qquad \text{a} \qquad y + z \leqq r. \tag{1}$$

Keď do prvej nerovnosti z (1) dosadíme $x + y = 1 - z - r$, dostaneme

$$\begin{aligned} 1 - z - r &\leqq z, \\ 1 - r &\leqq 2z. \end{aligned} \tag{2}$$

Keďže $y \geqq x$, má druhá nerovnosť z (1) nasledujúci dôsledok:

$$r \geqq y + z = \frac{y + y + z}{2} + \frac{z}{2} \geqq \frac{x + y + z}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1 - r}{2} + \frac{z}{2}.$$

V získanej nerovnosti ešte pomocou nerovnosti (2) odhadneme $z$, takže dostaneme

$$r \geqq \frac{1 - r}{2} + \frac{z}{2} \geqq \frac{1 - r}{2} + \frac{1 - r}{4} \geqq \frac{3}{4}(1 - r),$$

z ktorej už porovnaním pravej a ľavej strany vyplýva požadovaný odhad hodnoty $r$:

$$4r \geqq 3(1 - r) \quad \text{čiže} \quad r \geqq \frac{3}{7}.$$

Ostáva ukázať, že existuje rozlámanie tyče dĺžky 1 na štyri časti dĺžky nanajvýš $3/7$ tak, že zo žiadnych troch týchto častí sa potom nedá zložiť trojuholník – vyhovujú napríklad dĺžky $(1/7, 1/7, 2/7, 3/7)$.

**Iné riešenie.** K hodnote $r = 3/7$ sa dá dôjsť aj intuitívnym prístupom, najmä pokiaľ sa najskôr pokúsime vyriešiť úlohu pre rozlámanie tyče na tri časti. Podobne ako v predošlom riešení označme dĺžky jednotlivých častí ako $x \leqq y \leqq z \leqq r$. Úlohu si zjednodušíme tak, že sa obmedzíme na prípad $y = x$. Aby sa z dĺžok $(x, y, z)$ nedal zostrojiť trojuholník, musí platiť $z \geqq x + y = 2x$; vezmime teda $z = 2x$. Napokon, aby sa nedal zostrojiť trojuholník ani z dĺžok $(y, z, r)$, stačí, keď bude platiť $r = z + y = 2x + x = 3x$. Odtiaľ vychádza $x + y + z + r = x + x + 2x + 3x = 7x = 1$, a teda $r = 3x = 3/7$.

Naozaj, zo žiadnej trojice z dĺžok $(1/7, 1/7, 2/7, 3/7)$ sa trojuholník nedá zostrojiť.

Ostáva ešte ukázať, že táto hodnota $r$ je najmenšia. Inými slovami, keď rozlámeme tyč dĺžky 1 na ľubovoľné štyri časti, pričom každá z nich bude mať dĺžku menšiu ako $3/7$, tak sa z niektorých troch častí trojuholník zložiť dá. Označme dĺžky jednotlivých častí ako $a \leqq b \leqq c \leqq d < 3/7$, pričom $a + b + c + d = 1$. Skúmajme dve možnosti pre hodnotu $a$.

Ak by platilo $a < 1/7$, dostali by sme z nerovnosti $d < 3/7$ a rovnosti $1 = a + b + c + d$, že $1 - 1/7 - 3/7 < b + c$. V tom prípade by ale bolo $d < 3/7 < b + c$, a preto by sa z dĺžok $b \leqq c \leqq d$ dal zostrojiť trojuholník. Ak by platilo $1/7 \leqq a$, bolo by $1/7 \leqq a \leqq b$. Keby za týchto podmienok ani jedna z trojíc $(a, b, c)$, $(a, c, d)$ nespĺňala trojuholníkové nerovnosti, muselo by platiť $2/7 \leqq a + b \leqq c$ a následne $3/7 = 1/7 + 2/7 \leqq a + c \leqq d$, čo je v spore s tým, že $d < 3/7$.

## Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Nájdite najmenšie reálne číslo $r$ také, že tyč s dĺžkou 1 sa dá rozlámať na tri časti dĺžky nanajvýš $r$ tak, aby sa z nich nedal zložiť trojuholník. [$r = 1/2$, najdlhšia časť musí byť aspoň polovica celej dĺžky]

N2. Dokážte, že v ľubovoľnom štvorstene existuje taký vrchol, že z hrán, ktoré z neho vychádzajú, sa dá zostrojiť trojuholník. [Nech najdlhšia hrana v štvorstene $ABCD$ je $AB$. Ak sa z hrán pri vrchole $A$ nedá zostrojiť trojuholník, tak $|AC| + |AD| \leqq |AB|$. Z trojuholníkových nerovností $|AC| + |BC| > |AB|$ a $|AD| + |BD| > |AB|$ dostaneme, že z hrán vychádzajúcich z vrcholu $B$ sa trojuholník zostrojiť dá, pretože $|BC| + |BD| > 2|AB| - |AC| - |AD| \geqq |AB|$.]

D1. Na zabudnutej tabuli v Rasťovej ešte zabudnutejšej tmavej komnate je nakreslených päť už skoro zabudnutých úsečiek. Z každej trojice z týchto úsečiek vieme zložiť trojuholník. Dokážte, že vieme vybrať tri úsečky tak, že trojuholník, ktorý z nich vznikne, je ostrouhlý. [KMS 2008/2009, 3. zimná séria, úloha 8]

D2. Vyriešte zadanú úlohu pre lámanie tyče na päť (a prípadne viac) častí. [Zovšeobecnením úvahy v druhom riešení dostaneme pre päť častí hodnotu $r = 5/12$ a lámanie na $n$ častí vedie na vzorec $r = \frac{F_n}{F_1 + \cdots + F_n}$, pričom $F_n$ je $n$-té Fibonacciho číslo.]


Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

| | |
|---|---|
| Autori: | Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf |
| Recenzenti: | Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný |
| Redakčná úprava: | Tomáš Jurík, Pavel Novotný, Peter Novotný |
| Vydal: | IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2013 |