63. ročník Matematickej olympiády
2013/2014 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz $V = ab + bc + cd + da$, ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú dvojicu podmienok*

$$2a - 5b + 2c - 5d = 4,$$
$$3a + 4b + 3c + 4d = 6.$$

(Jaroslav Švrček)

Riešenie. Pre daný výraz V platí

$$V = a(b + d) + c(b + d) = (a + c)(b + d).$$

Podobne môžeme upraviť aj obe dané podmienky:

$$2(a + c) - 5(b + d) = 4 \qquad \text{a} \qquad 3(a + c) + 4(b + d) = 6. \tag{1}$$

Ak teda zvolíme substitúciu $m = a + c$ a $n = b + d$, dostaneme riešením sústavy (1) $m = 2$ a $n = 0$. Pre daný výraz potom platí $V = mn = 0$.

Záver. Za daných podmienok nadobúda výraz V iba hodnotu 0.

Iné riešenie. Podmienky úlohy si predstavíme ako sústavu rovníc s neznámymi a, b a parametrami c, d. Vyriešením tejto sústavy (sčítacou alebo dosadzovacou metódou) vyjadríme $a = 2 - c$, $b = -d$ ($c, d \in \mathbb{R}$) a po dosadení do výrazu V dostávame

$$V = (2 - c)(-d) - dc + cd + d(2 - c) = 0.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Pri postupe z prvého riešenia dajte 2 body za rozklad výrazu V na súčin, 2 body za úpravu podmienok na sústavu (1), 1 bod za jej vyriešenie a 1 bod za výpočet hodnoty V.

---

2. *Čísla $1, 2, \ldots, 10$ rozdeľte na dve skupiny tak, aby najmenší spoločný násobok súčinu všetkých čísel prvej skupiny a súčinu všetkých čísel druhej skupiny bol čo najmenší.*

(Ján Mazák)

Riešenie. Pre uvažované súčiny a a b určite platí $a \cdot b = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Aspoň jedno z čísel a, b je preto deliteľné 2^4, aspoň jedno deliteľné 3^2, aspoň jedno deliteľné 5 a práve jedno deliteľné 7. Pre najmenší spoločný násobok n čísel a, b preto platí $n \geqq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 5\,040$, pritom rovnosť tu nastane práve vtedy, keď ani jedno z čísel a, b nebude deliteľné žiadnym z čísel 2^5, 3^3 a 5^2.

Ak zvolíme napríklad $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ a $b = 1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5\,040$, bude najmenší spoločný násobok oboch čísel práve 5 040. Tým je ukázané, že 5 040 je naozaj najmenšia zo všetkých možných hodnôt n.

I keď bolo úlohou nájsť iba jeden príklad, pre úplnosť uvedieme všetky rozdelenia s minimálnou hodnotou $n = 5\,040$:

Prvá skupina čísel	Druhá skupina čísel
2, 3, 4, 5, 6	1, 7, 8, 9, 10
3, 5, 6, 8	1, 2, 4, 7, 9, 10
2, 5, 8, 9	1, 3, 4, 6, 7, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6	7, 8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 8	2, 4, 7, 9, 10
1, 2, 5, 8, 9	3, 4, 6, 7, 10
2, 3, 4, 5, 6, 7	1, 8, 9, 10
3, 5, 6, 7, 8	1, 2, 4, 9, 10
2, 5, 7, 8, 9	1, 3, 4, 6, 10
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	8, 9, 10
1, 3, 5, 6, 7, 8	2, 4, 9, 10
1, 2, 5, 7, 8, 9	3, 4, 6, 10

Nájsť ich nie je ťažké, keď si uvedomíme, že čísla 1 a 7 môžeme dať do ľubovoľnej z oboch skupín, zatiaľ čo v tej istej skupine spolu nemôžu byť 4 s 8, 5 s 10, 3 s 9 ani 6 s 9; s 8 spolu môže byť práve jedno z párnych čísel 2, 6 a 10. Získame tak iba tri základné rozdelenia (prvé tri riadky tabuľky), z ktorých možno každé štyrmi spôsobmi doplniť číslami 1 a 7.

Poznámka. Úlohu možno vyriešiť aj bez výpočtu súčinu $a \cdot b$. Deliteľnosť n číslami 3^2, 5 a 7 vyplýva z ich priameho zastúpenia medzi rozdeľovanými číslami, deliteľnosť číslom 2^4 z jednoduchej úvahy o rozdelení všetkých piatich párnych čísel: ak nie je číslo 8 vo svojej skupine ako párne jediné, je všetko jasné, v opačnom prípade sú v rovnakej skupine čísla 2, 4 a 6 (aj 10, ale to už ani nepotrebujeme).

Za správne zdôvodnené riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za rozklad súčinu 10! na súčin prvočísel, 3 body za odhad najmenšieho spoločného násobku a 2 body za aspoň jedno správne rozdelenie čísel (hoci len uhádnuté).

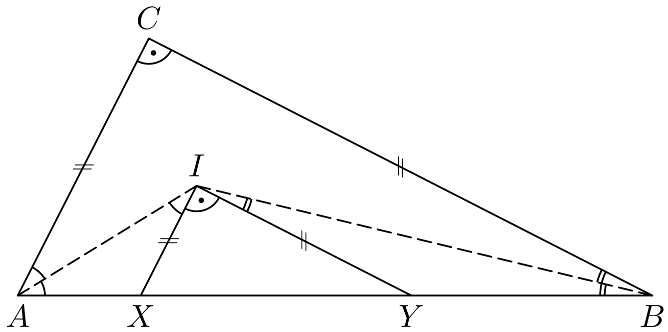
---

3. *Daný je trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C. Stredom I kružnice trojuholníku vpísanej vedieme rovnobežky so stranami CA a CB, ktoré pretnú preponu postupne v bodoch X a Y. Dokážte, že platí $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$.* (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Trojuholník AIX je rovnoramenný, pretože $|\measuredangle IAX| = |\measuredangle IAC| = |\measuredangle AIX|$ (prvá rovnosť vyplýva z podmienky, že bod I leží na osi uhla BAC, druhá potom z vlastností striedavých uhlov, obr. 1). Preto $|AX| = |IX|$. Analogicky zistíme, že $|BY| = |YI|$. Keďže úsečky IX a IY zvierajú (rovnako ako s nimi rovnobežné úsečky CA a CB) pravý uhol, podľa Pytagorovej vety pre pravouhlý trojuholník XIY platí

$$|AX|^2 + |BY|^2 = |IX|^2 + |YI|^2 = |XY|^2,$$

čo sme mali dokázať.



Obr. 1

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 4 body za zdôvodnenie rovností $|AX| = |IX|$ a $|BY| = |YI|$.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 14. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	...
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014