2014/2015
64. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 1. decembra 2014.*)

1. Dané je prirodzené číslo n. Štvorec so stranou dĺžky n je rozdelený na n^2 jednotkových štvorčekov. Za vzdialenosť dvoch štvorčekov považujeme vzdialenosť ich stredov. Určte počet dvojíc štvorčekov, ktorých vzdialenosť je 5. (*Jaroslav Zhouf*)

2. Daný je trojuholník ABC, v ktorom je BC najkratšia strana. Jej stred označme M. Na stranách AB a AC určíme postupne body X a Y tak, aby platilo $|BX| = |BC| = |CY|$. Priesečník priamok CX a BY označme Z. Dokážte, že priamka ZM prechádza stredom kružnice pripísanej ku strane BC daného trojuholníka. (*Michal Rolínek*)

3. Nájdite všetky celé čísla $k \geqq 2$, pre ktoré existuje k-prvková množina M celých kladných čísel taká, že súčin všetkých čísel z M je deliteľný súčtom ľubovoľných dvoch (rôznych) čísel z M. (*Jaromír Šimša*)

4. Predpokladajme, že pre reálne čísla x, y, z platí

$$15(x + y + z) = 12(xy + yz + zx) = 10(x^2 + y^2 + z^2)$$

a že aspoň jedno z nich je rôzne od nuly.

a) Dokážte rovnosť $x + y + z = 4$.

b) Nájdite najmenší interval $\langle a, b\rangle$, v ktorom ležia všetky tri čísla z ľubovoľnej trojice (x, y, z) vyhovujúcej predpokladom úlohy.

(*Jaromír Šimša*)

5. V danom trojuholníku ABC označme D bod dotyku kružnice vpísanej so stranou BC. Kružnica vpísaná do trojuholníka ABD sa dotýka strán AB a BD v bodoch K a L. Kružnica vpísaná do trojuholníka ADC sa dotýka strán DC a AC v bodoch M a N. Dokážte, že body K, L, M, N ležia na jednej kružnici. (*Josef Tkadlec*)

6. Nech a, b sú dané navzájom nesúdeliteľné prirodzené čísla. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ prirodzených čísel je zostavená tak, že pre každé $n > 1$ platí $x_n = ax_{n-1} + b$. Dokážte, že v ľubovoľnej takej postupnosti každý člen x_n s indexom $n > 1$ delí nekonečne veľa jej ďalších členov. Platí toto tvrdenie aj pre $n = 1$? (*Jaromír Šimša*)