64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9

<u>*Informácia pre obvodnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení obvodných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 17. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* skmo@skmo.sk *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* skmo.sk/dokument.php?id=429 *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X. Y. a práve traja žiaci (vrátane X. Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X. Y., tak žiakovi X. Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

---

1. *Myslím na niekoľko bezprostredne po sebe idúcich prirodzených čísel. Keby sme z nich vyškrtli čísla* 70, 82 *a* 103, *aritmetický priemer čísel by sa nezmenil. Keby sme namiesto toho vyškrtli čísla* 122 *a* 123, *aritmetický priemer by sa zmenšil presne o* 1. *Na ktoré prirodzené čísla myslím?* (*Libor Šimůnek*)

Riešenie. Keď sa škrtnutím trojice čísel množiny nezmení jej aritmetický priemer, má táto trojica čísel rovnaký aritmetický priemer ako celá množina. Aritmetický priemer celej množiny čísel je teda

$$\frac{70+82+103}{3}=85.$$

Počet čísel celej množiny označme n. Po škrtnutí čísel 122 a 123 zvýši $n-2$ čísel a podľa zadania sa aritmetický priemer zmenší o 1, teda bude 84. Vynásobením aritmetického priemeru čísel a počtu týchto čísel dostaneme ich súčet. Na základe toho zostavíme nasledujúcu rovnicu, ktorú vyriešime:

$$\begin{aligned}85n &= 84(n-2)+122+123,\\ 85n &= 84n+77,\\ n &= 77.\end{aligned}$$

Neznámu množinu čísel tvorí 77 bezprostredne po sebe idúcich čísel.

Prostredné číslo je rovné aritmetickému priemeru, pred ním a za ním je 38 čísel, pretože $77=2\cdot 38+1$. Najmenšie číslo množiny je teda $85-38=47$ a najväčšie $85+38=123$. Hľadanými číslami sú prirodzené čísla od 47 po 123 vrátane.

Iné riešenie. Rovnakým spôsobom zistíme, že aritmetický priemer množiny čísel pred škrtaním je 85. Vyškrtnuté čísla 122 a 123 potom vyjadríme pomocou tohto priemeru: $122=85+37$, $123=85+38$. V súčte čísel, ktoré zostanú po vyškrtnutí čísel 122 a 123, „chýba“ práve súčet $37+38$ k tomu, aby tieto čísla mali aritmetický priemer 85. Zo zadania vieme, že aritmetický priemer týchto zvyšných čísel je o 1 menší ako 85, týchto čísel preto musí byť práve $37 + 38$, t. j. 75. Počet čísel pred škrtaním bol $75 + 2$, t. j. 77. Ďalej pokračujeme ako v predchádzajúcom riešení.

Návrh hodnotenia. 2 body za priemer myslených čísel (85); 3 body za počet myslených čísel (77); 1 bod za myslené čísla (47 až 123).

---

2. *Po sebe idúce prirodzené čísla postupne pričítame a odčítame podľa nasledujúceho návodu:*

$$1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + \dots$$

Určte, aká bude hodnota takéhoto výrazu, ak jeho posledný člen je $2\,015$.

(*Libuše Hozová*)

Riešenie. Súčty dvojíc susediacich čísel s opačnými znamienkami sú buď -1, alebo 1. Tieto hodnoty sa navyše pravidelne striedajú. V uvažovanom výraze sa teda vždy niekoľko susediacich čísel zruší:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 - 11 - 12 + 13 + \cdots \\
&= [1 + (2 - 3)] + [(-4 + 5) + (6 - 7)] + [(-8 + 9) + (10 - 11)] + [(-12 + 13) + \cdots \\
&= [1 - 1] + [1 - 1] + [1 - 1] + [1 - \cdots \\
&= 0 + 0 + 0 + \cdots
\end{aligned}$$

Prvú nulu dostávame ako súčet prvej trojice čísel, ostatné nuly dostávame ako súčty po sebe idúcich štvoríc čísel. Súčet uvedeného výrazu by teda bol rovný nule, ak by končil číslom 3, 7, 11, 15 atď. Všeobecnejšie súčet takého výrazu je rovný nule práve vtedy, keď končí číslom, ktoré má po delení štyrmi zvyšok 3. Keďže číslo $2\,015$ má práve túto vlastnosť, je hodnota zadaného výrazu rovná nule.

Poznámka. Úvodné postrehy je možné zúročiť rôznymi spôsobmi, ktoré môžu viesť k podrobnejšej diskusii o znamienkach pri číslach na konci daného výrazu. Z uvedeného riešenia vyplýva, že tento výraz končí takto:

$$\cdots + [(-2\,012 + 2\,013) + (2\,014 - 2\,015)].$$

Sčítance daného výrazu je možné zoskupovať aj napr. takto:

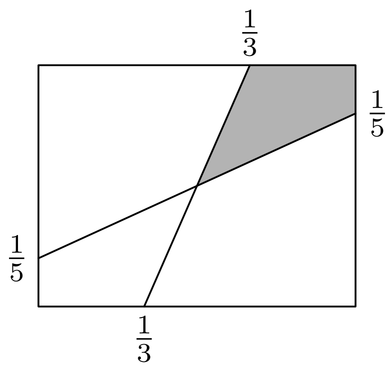
$$[1 + 2 - 3 - 4] + [5 + 6 - 7 - 8] + [9 + 10 - 11 - 12] + \cdots = -4 - 4 - 4 - \cdots$$

Takých štvoríc možno utvoriť nanajvýš 503 ($2\,015 = 503 \cdot 4 + 3$). Celkový súčet je podľa tohto návodu vyjadrený nasledovne:

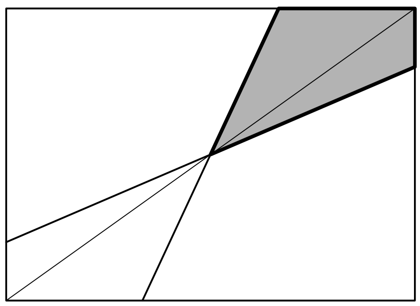
$$503 \cdot (-4) + 2\,013 + 2\,014 - 2\,015 = -2\,012 + 2\,013 + 2\,014 - 2\,015 = 0.$$

Návrh hodnotenia. 1 bod za objav, že súčty dvojíc susedných čísel s opačnými znamienkami sú striedavo -1 a 1; 2 body za objav, že súčty po sebe idúcich štvoríc, resp. prvej trojice čísel sú rovné 0; 3 body za správne určenie a zdôvodnenie celkového súčtu.

3. *Anička dostala na narodeniny tortu v tvare obdĺžnika. Pomocou dvoch priamych rezov si odkrojila kúsok, ktorý je na obr. vyznačený sivou. Určte, akú časť torty si Anička odkrojila.* (*Alžbeta Bohiníková*)



Riešenie. Obdĺžnik je stredovo súmerný podľa stredu, ktorý je priesečníkom uhlopriečok. Podľa tohto stredu sú tiež súmerné každé dva body, ktoré ležia na protiľahlých stranách obdĺžnika a sú v rovnakých pomeroch vzhľadom na zodpovedajúce si vrcholy. Takými dvojicami bodov sú aj body určujúce oba rezy zo zadania. Tieto rezy a uhlopriečky obdĺžnika sa teda pretínajú v jednom spoločnom bode. Jedna z týchto uhlopriečok rozdeľuje sivo vyznačený štvoruholník na dva trojuholníky:



Jedna strana ľavého trojuholníka je práve tretinou hornej strany obdĺžnika a výška na túto stranu je polovicou pravej strany obdĺžnika. Tento trojuholník teda zaberá

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

obsahu celého obdĺžnika. Jedna strana pravého trojuholníka je práve pätinou pravej strany obdĺžnika a výška na túto stranu je polovicou hornej strany obdĺžnika. Tento trojuholník teda zaberá

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$$

obsahu celého obdĺžnika. Obsah sivého štvoruholníka je rovný

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{5+3}{60} = \frac{2}{15}$$

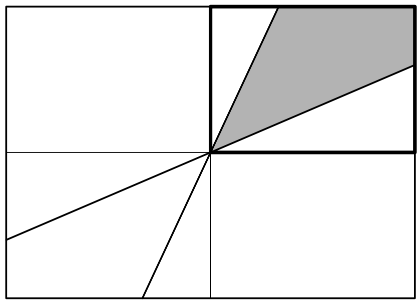
obsahu celého obdĺžnika. Zjedená časť teda tvorí $\frac{2}{15}$ celej torty.

Poznámka. Ak veľkosť hornej strany obdĺžnika označíme a a veľkosť pravej strany b, tak môžeme predchádzajúce úvahy vyjadriť takto:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{5} \cdot \frac{a}{2} = \cdots = \frac{2ab}{15}.$$

Obdĺžnik má obsah ab, zjedená časť teda tvorí $\frac{2}{15}$ celej torty.

Iné riešenie. Na úvod opäť ukážeme, že sa rezy pretínajú v strede obdĺžnika. Týmto bodom prechádzajú aj osi obdĺžnika, ktoré ho rozdeľujú na štyri zhodné obdĺžniky. Jeden z týchto obdĺžnikov je rezmi rozdelený na tri časti pozostávajúce zo sivého štvoruholníka a dvoch bielych pravouhlých trojuholníkov.



Obsah sivej časti môžeme vyjadriť tak, že od obsahu štvrtinového obdĺžnika odčítame obsahy oboch bielych trojuholníkov. Vzhľadom na predošlé označenie sú obsahy týchto trojuholníkov rovné

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right) \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{24} \quad \text{a} \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{5}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{3ab}{40}.$$

Obsah sivej plochy teda vychádza

$$\frac{ab}{4} - \frac{ab}{24} - \frac{3ab}{40} = \frac{(30-5-9)ab}{120} = \frac{2ab}{15}.$$

Opäť prichádzame k záveru, že zjedená časť tvorí $\frac{2}{15}$ torty.

Návrh hodnotenia. 1 bod za zdôvodnenie, že sa rezy pretínajú v strede obdĺžnika (možno dokázať s využitím stredovej súmernosti, podobnosti či iných osobitných úvah); 2 body za obsahy pomocných trojuholníkov; 2 body za výsledok; 1 bod podľa kvality a úplnosti komentára.

---

4. *Istý obdĺžnik mal svoje rozmery vyjadrené v decimetroch celými číslami. Potom rozmery trikrát zmenil. Najskôr jeden svoj rozmer zdvojnásobil a druhý zmenil tak, aby mal rovnaký obsah ako na začiatku. Potom jeden rozmer zväčšil o 1 dm a druhý zmenšil o 4 dm, pričom mal stále taký istý obsah ako na začiatku. Nakoniec svoj kratší rozmer zmenšil o 1 dm, dlhší ponechal bezo zmeny. Určte pomer strán posledného obdĺžnika.*
(*Erika Novotná*)

Riešenie. Označme dĺžky strán obdĺžnika v decimetroch x a y; obsah obdĺžnika teda bol $x \cdot y$. Predpokladajme, že pri prvej zmene sa zväčšovala strana s dĺžkou x. Po prvej zmene mal obdĺžnik rovnaký obsah, musel mať teda rozmery $2x$ a $\frac{y}{2}$. Po druhej zmene mohol mať buď rozmery a) $2x+1$ a $\frac{y}{2}-4$, alebo b) $2x-4$ a $\frac{y}{2}+1$. V každom prípade mal obdĺžnik aj po druhej zmene rovnaký obsah ako pôvodne, teda $x \cdot y$. Rozoberme obe možnosti:

a) V tomto prípade platí

$$x \cdot y = (2x+1)\left(\frac{y}{2}-4\right).$$

Po úprave dostávame $0 = -8x + \frac{y}{2} - 4$, teda $\frac{y}{2} - 4 = 8x$. Po druhej zmene mal obdĺžnik rozmery $2x+1$ a $8x$. Keďže x je prirodzené číslo, platí $8x > 2x+1$ a pri tretej zmene musel obdĺžnik skrátiť svojou stranu $2x+1$ na $2x$. Pomer strán výsledného obdĺžnika je v tomto prípade rovný $8x : 2x = 4 : 1$.

b) V tomto prípade platí

$$x \cdot y = (2x-4)\left(\frac{y}{2}+1\right).$$

Po úprave dostávame $0 = 2x - 2y - 4$, teda $2x - 4 = 2y$. Po druhej zmene mal obdĺžnik rozmery $2y$ a $\frac{y}{2}+1$. Keďže y je prirodzené číslo, platí $2y > \frac{y}{2}+1$ a pri tretej zmene musel obdĺžnik skrátiť svoju stranu $\frac{y}{2}+1$ na $\frac{y}{2}$. Pomer strán výsledného obdĺžnika je aj v tomto prípade rovný $2y : \frac{y}{2} = 4 : 1$.

Návrh hodnotenia. Po 3 bodoch za rozbor každej z možností: 1 bod za vyjadrenie vzťahu medzi x a y (napr. $\frac{y}{2} - 4 = 8x$); 1 bod za vyjadrenie rozmerov obdĺžnika po ich druhej zmene (napr. $2x+1$ a $8x$); 1 bod za označenie kratšej strany a vyjadrenie výsledného pomeru.

Ak riešiteľ označí pri niektorej možnosti jeden rozmer za kratší bez akejkoľvek úvahy, strhnite pri hodnotení tejto možnosti 1 bod.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015