64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015

Riešenia úloh domáceho kola kategórie C

---

1. *Určte všetky dvojice (x, y) reálnych čísel, ktoré vyhovujú sústave rovníc*

$$\sqrt{(x+4)^2} = 4 - y,$$
$$\sqrt{(y-4)^2} = x + 8.$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Vzhľadom na to, že pre každé reálne číslo a platí $\sqrt{a^2} = |a|$, je daná sústava rovníc ekvivalentná so sústavou rovníc

$$|x+4| = 4 - y,$$
$$|y-4| = x + 8.$$

Z prvej rovnice vidíme, že musí byť $4 - y \geqq 0$, teda $y \leqq 4$. V druhej rovnici môžeme teda odstrániť absolútnu hodnotu. Dostaneme tak

$$|y-4| = 4 - y = x + 8, \quad \text{t. j.} \quad -y = x + 4.$$

Po dosadení za $x + 4$ do prvej rovnice dostaneme

$$|-y| = |y| = 4 - y.$$

Keďže $y \leqq 4$, budeme ďalej uvažovať dva prípady.

Pre $0 \leqq y \leqq 4$ riešime rovnicu $y = 4 - y$, a teda $y = 2$. Nájdenej hodnote $y = 2$ zodpovedá po dosadení do druhej rovnice $x = -6$.

Pre $y < 0$ dostaneme rovnicu $-y = 4 - y$, ktorá však nemá riešenie.

Záver. Daná sústava rovníc má práve jedno riešenie, a to $(x, y) = (-6, 2)$.

Iné riešenie. Odstránením absolútnych hodnôt v oboch rovniciach, t. j. rozborom štyroch možných prípadov, keď

a) $(x + 4 \geqq 0) \wedge (y - 4 \geqq 0)$, t. j. $(x \geqq -4) \wedge (y \geqq 4)$,
b) $(x + 4 \geqq 0) \wedge (y - 4 < 0)$, t. j. $(x \geqq -4) \wedge (y < 4)$,
c) $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 \geqq 0)$, t. j. $(x < -4) \wedge (y \geqq 4)$,
d) $(x + 4 < 0) \wedge (y - 4 < 0)$, t. j. $(x < -4) \wedge (y < 4)$,

zistíme, že prípady a), b), c) nedávajú (vzhľadom na uvedené obmedzenia v jednotlivých prípadoch) žiadne reálne riešenie. V prípade d) potom dostaneme jediné riešenie $(x, y) = (-6, 2)$ danej sústavy.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V obore reálnych čísel vyriešte rovnicu:
a) $|x| = x + 2$ $[x = -1]$
b) $|2x + 2| = x + 4$ $[x = -2,\ x = 2]$
c) $|x - 1| = |x| - 1$ $[x \geqq 1]$

N2. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc:
a) $|x + 2| = y - 1$, $|y - 5| = -x$ $[x = -3,\ y = 2]$
b) $|x - 1| = y$, $|x - 2| = y + 2$ [sústava nemá riešenie]
c) $|x| = y + 1$, $x = |y| + 1$ $[x \geqq 1,\ y \geqq 0]$

2. *Peter má zvláštne hodinky s tromi ručičkami – prvá z nich obehne kruhový ciferník za minútu, druhá za 3 minúty a tretia za 15 minút. Na začiatku sú všetky ručičky v rovnakej polohe. Určte, za ako dlho budú ručičky rozdeľovať ciferník na tri zhodné časti. Nájdite všetky riešenia.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Predstavme si klasický ciferník s číslami 1 – 12. Bez ujmy na všeobecnosti si predstavme, že na začiatku sú všetky tri ručičky na čísle 12.

Ak sa otočí 15-minútová ručička o uhol α, otočí sa 3-minútová ručička o uhol 5α a minútová ručička o uhol 15α. Keďže každé dve ručičky v hľadaných polohách spolu zvierajú uhol $120°$ a 3-minútová ručička je rýchlejšia ako 15-minútová, dajú sa hľadané polohy získať ako riešenia rovnice $5\alpha - \alpha = k \cdot 120°$, ktorými sú uhly $\alpha = k \cdot 30°$, pričom k nadobúda kladné celé hodnoty, ktoré nie sú násobkami troch, inak by sa dotyčné ručičky prekrývali.

Môžeme teda postupovať tak, že budeme testovať hodnoty $\alpha = k \cdot 30°$ postupne pre jednotlivé hodnoty čísla k. Naozaj tak začneme a priebežne uvidíme, ako sa dajú po niekoľkých krokoch vďaka periodickosti získať všetky ďalšie riešenia danej úlohy.

Uvažujme najskôr $k = 1$, teda $\alpha = 30°$. Pri tejto hodnote sa otočila najrýchlejšia ručička o uhol $450°$. V tomto okamihu sa najpomalšia ručička nachádza na čísle 1 ciferníka, druhá ručička na čísle 5 a najrýchlejšia ručička na čísle 3. Tento prípad teda nie je riešením danej úlohy.

Nech je ďalej $k = 2$, čiže $\alpha = 60°$. Pri tejto hodnote sa otočila najrýchlejšia ručička o uhol $900°$. V tomto okamihu sa najpomalšia ručička nachádza na čísle 2 ciferníka, druhá ručička na čísle 10 a najrýchlejšia ručička na čísle 6. Tento prípad je teda jedným riešením danej úlohy.

Vidíme, že môžeme zostaviť tabuľku, z ktorej jednoducho vyčítame všetky riešenia:

	polohy príslušnej ručičky na ciferníku 15-minútová	3-minútová	minútová	je riešením?	čas
$k = 1$	1	5	3	nie	$1,25$ min
$k = 2$	2	10	6	*áno*	$2 \cdot 1,25$ min
$k = 4$	4	8	12	*áno*	$4 \cdot 1,25$ min
$k = 5$	5	1	3	nie	
$k = 7$	7	11	9	nie	
$k = 8$	8	4	12	*áno*	$8 \cdot 1,25$ min
$k = 10$	10	2	6	*áno*	$10 \cdot 1,25$ min
$k = 11$	11	7	9	nie	
$k = 12$	12	12	12	nie	

Do tabuľky sme uviedli aj „zakázanú" hodnotu $k = 12$ deliteľnú tromi, pri ktorej sa všetky tri ručičky prekryjú, takže v ďalšom priebehu sa budú ich polohy periodicky opakovať. Časy, v ktorých to nastane, budú vždy o 15 minút dlhšie. Zistili sme tak, že všetky hľadané časy sú

$$
\begin{aligned}
t &= (12n + 2) \cdot 1,25 \text{ min} = (15n + 2,5) \text{ min},\\
t &= (12n + 4) \cdot 1,25 \text{ min} = (15n + 5) \text{ min},\\
t &= (12n + 8) \cdot 1,25 \text{ min} = (15n + 10) \text{ min},\\
t &= (12n + 10) \cdot 1,25 \text{ min} = (15n + 12,5) \text{ min},
\end{aligned}
$$

pričom $n = 0, 1, 2, \ldots$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Aký uhol spolu zvierajú hodinová a minútová ručička o 1:30 na ciferníku

N2. a) s 12 číslami, [$135°$]

N3. b) s 24 číslami? [$157,5°$]

N4. Na ciferníku s 12 číslami nájdite všetky časy, kedy budú hodinová a minútová ručička zvierať uhol $120°$ v intervale

N5. a) 0–12 hodín, [$\frac{4}{11}$ h, $2\cdot\frac{4}{11}$ h, $4\cdot\frac{4}{11}$ h, $5\cdot\frac{4}{11}$ h, $7\cdot\frac{4}{11}$ h, $8\cdot\frac{4}{11}$ h, $10\cdot\frac{4}{11}$ h, $11\cdot\frac{4}{11}$ h, $13\cdot\frac{4}{11}$ h, $14\cdot\frac{4}{11}$ h, $16\cdot\frac{4}{11}$ h, $17\cdot\frac{4}{11}$ h, $19\cdot\frac{4}{11}$ h, $20\cdot\frac{4}{11}$ h, $22\cdot\frac{4}{11}$ h, $23\cdot\frac{4}{11}$ h, $25\cdot\frac{4}{11}$ h, $26\cdot\frac{4}{11}$ h, $28\cdot\frac{4}{11}$ h, $29\cdot\frac{4}{11}$ h, $31\cdot\frac{4}{11}$ h, $32\cdot\frac{4}{11}$ h]

N6. b) 0–∞ hodín. [$(3n+1)\cdot\frac{4}{11}$ h, $(3n+2)\cdot\frac{4}{11}$ h, $n=0,1,2,\dots$]

---

3. *Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0 \leqq k \leqq 64$, vyberie Simona k políčok šachovnice 8×8 a každé z nich označí krížikom. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom vyplní tridsiatimi dvoma dominovými kockami. Ak je počet kociek pokrývajúcich dva krížiky nepárny, vyhráva Lenka, inak vyhráva Simona. V závislosti od k určte, ktoré z dievčat má vyhrávajúcu stratégiu.* (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Riešenie rozdeľme podľa hodnoty čísla k.

Ak $k=0$, je počet kociek pokrývajúcich dva krížiky rovný nule, preto vyhrá Simona.

Ak $0<k\leqq 32$, umiestni Simona krížiky napr. iba na biele políčka šachovnice. Potom pod žiadnou kockou nie sú dva krížiky, preto vyhrá Simona.

Ak $k>32$, pričom k je párne, umiestni Simona 32 krížikov na biele políčka a zvyšné krížiky kamkoľvek. Potom pod párnym počtom kociek sú dva krížiky (takých kociek je totiž práve $k-32$, pretože každá dominová kocka pokrýva jedno biele a jedno čierne políčko šachovnice), takže vyhrá Simona.

Ak $32<k\leqq 61$, pričom k je nepárne, nenapíše Simona krížiky do troch políčok v jednom z „bielych rohov“, t. j. do rohového bieleho a do dvoch susedných čiernych políčok, ale napíše ich do všetkých ostatných 31 bielych políčok a zvyšok do akýchkoľvek čiernych políčok (okrem spomenutých dvoch). Na bielych políčkach je teda nepárny počet krížikov a na čiernych párny počet krížikov. Okolo každého čierneho políčka s krížikom sú všetky biele políčka tiež s krížikom, preto každá kocka, ktorá zakrýva čierne políčko s krížikom, zakrýva dva krížiky. Iné kocky dva krížiky nezakrývajú. Preto opäť vyhrá Simona.

Ak $k=63$, dva krížiky nie sú iba pod jedinou kockou, preto v takom prípade vyhrá Lenka, a to bez potreby akejkoľvek stratégie.

Odpoveď. Pre každé $0\leqq k\leqq 64$, $k\neq 63$, má vyhrávajúcu stratégiu Simona, pri $k=63$ vyhráva automaticky Lenka.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Riešte danú úlohu pre šachovnice 2×2 a 4×4.

N2. Ako sa zmení výsledok danej úlohy, ak budeme namiesto dvoch krížikov pod kockou uvažovať podmienku, že pod kockou nie je ani jeden krížik?

N3. Simona a Lenka hrajú hru. Pre dané celé číslo k také, že $0\leqq k\leqq 9$, vyberie Simona k políčok šachovnice 3×3 a na každé z nich napíše číslo 1, na ostatné políčka napíše číslo 0. Lenka potom šachovnicu nejakým spôsobom pokryje tromi triminovými kockami, t. j. kockami tvaru 3×1, a čísla pod ich políčkami vynásobí. Ak je počet kociek so súčinom 0 nepárny, vyhráva Simona, v ostatných prípadoch vyhráva Lenka. Určte, v koľkých percentách prípadov (vzhľadom na hodnotu k) má vyhrávajúcu stratégiu Simona. [80%]

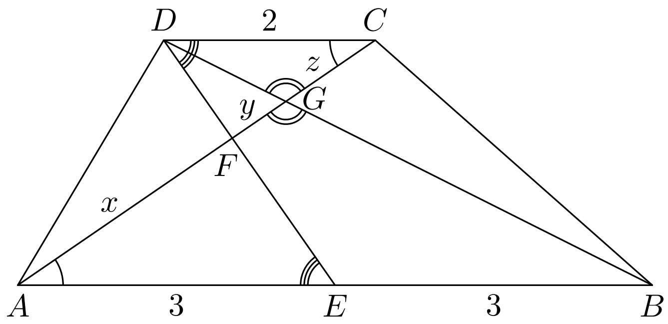
4. *Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, v ktorom platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer*

$$|AF| : |FG| : |GC|.$$

(*Jaroslav Zhouf*)

Riešenie. Keďže v zadaní aj v otázke úlohy sú iba pomery, môžeme si dĺžky strán lichobežníka zvoliť ako vhodné konkrétne čísla. Zvoľme teda napr. $|AB| = 6$, potom $|AE| = |BE| = 3$ a $|CD| = 2$. Hľadané dĺžky označme $|AF| = x$, $|FG| = y$, $|GC| = z$. Tieto dĺžky sme vyznačili na obr. 1, taktiež aj tri dvojice zhodných uhlov, ktoré teraz využijeme pri úvahách o trojuholníkoch podobných podľa vety *uu*.

Trojuholníky ABG a CDG sú podobné, preto $(x + y) : z = 6 : 2 = 3 : 1$. Aj trojuholníky AEF a CDF sú podobné, preto $x : (y + z) = 3 : 2$.



Obr. 1

Odvodené úmery zapíšeme ako sústavu rovníc

$$\begin{aligned} x + y - 3z &= 0, \\ 2x - 3y - 3z &= 0. \end{aligned}$$

Ich odčítaním získame rovnosť $x = 4y$, čiže $x : y = 4 : 1$. Dosadením tohto výsledku do prvej rovnice dostaneme $5y = 3z$ čiže $y : z = 3 : 5$. A spojením oboch pomerov získame výsledok $x : y : z = 12 : 3 : 5$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Lichobežník $ABCD$ má základne s dĺžkami $|AB| = a$, $|CD| = c$, jeho uhlopriečky sa pretínajú v bode U.

a) Dokážte, že trojuholníky ABU a CDU sú podobné a určte pomer podobnosti. Aký je pomer obsahov týchto trojuholníkov? [$a^2 : c^2$]

b) Dokážte, že obsahy trojuholníkov ADU a BCU sú rovnaké.

N2. Platí $a : b = 1 : 2$, $b : c = 3 : 4$, $c : d = 5 : 6$. Určte $a : b : c : d$. [15 : 30 : 40 : 48]

5. *Rozdiel dvoch prirodzených čísel je* 2 010 *a ich najväčší spoločný deliteľ je* 2 014*-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte všetky také dvojice čísel.*

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Označme hľadané čísla a a b ($a > b$) a d ich najväčší spoločný deliteľ. Potom $a = md$, $b = nd$, pričom $m > n$ sú nesúdeliteľné čísla. Keďže najmenší spoločný násobok čísel a, b je číslo mnd, dosadením do zadaných vzťahov dostaneme rovnosti

$$a - b = (m - n)d = 2\,010,$$
$$mnd = 2\,014d, \quad \text{čiže} \quad mn = 2\,014.$$

Podľa rozkladu na súčin prvočísel $2\,014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ vypíšeme všetky možné dvojice (m, n) a pre každú z nich sa presvedčíme, či číslo $m - n$ je deliteľom čísla 2 010. V pozitívnom prípade príslušný podiel udáva číslo d a výpočet neznámych $a = md$ a $b = nd$ je už jednoduchý:

a) $m = 2\,014$ a $n = 1$: $m - n = 2\,013$ nedelí 2 010;

b) $m = 19 \cdot 53 = 1\,007$ a $n = 2$: $m - n = 1\,005 \mid 2\,010$, $d = 2$, $a = 1\,007 \cdot 2 = 2\,014$, $b = 2 \cdot 2 = 4$;

c) $m = 2 \cdot 53 = 106$ a $n = 19$: $m - n = 87$ nedelí 2 010;

d) $m = 53$ a $n = 2 \cdot 19 = 38$: $m - n = 15 \mid 2\,010$, $d = 134$, $a = 53 \cdot 134 = 7\,102$, $b = 38 \cdot 134 = 5\,092$.

Záver. Hľadané čísla tvoria jednu z dvojíc $(2\,014, 4)$ alebo $(7\,102, 5\,092)$.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Nájdite všetky delitele čísla 2 014. $[1, 2, 19, 38, 53, 106, 1\,007, 2\,014]$

N2. Rozdiel dvoch prirodzených čísel je 5 a ich najväčší spoločný deliteľ je 6-krát menší ako ich najmenší spoločný násobok. Určte obe také dvojice čísel.

N3. Dokážte, že pre každé dve prirodzené čísla a, b a ich najväčší spoločný deliteľ D a ich najmenší spoločný násobok n platí $ab = nD$.

N4. Platí pre každé tri prirodzené čísla a, b, c a ich najväčší spoločný deliteľ D a ich najmenší spoločný násobok n rovnosť $abc = nD$?

N5. Ak majú prirodzené čísla a, b najväčšieho spoločného deliteľa D, majú rovnakého najväčšieho spoločného deliteľa aj čísla a, b, $a - b$, $a + b$. Dokážte. Platí rovnaké tvrdenie pre najmenší spoločný násobok?

6. *Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasledujú bezprostredne za desatinnou čiarkou dve deviatky.* (*Josef Tkadlec*)

Riešenie. Označme a najbližšie väčšie prirodzené číslo k iracionálnemu číslu $\sqrt{n}$. Podľa zadania potom platí $a - 0{,}01 \leqq \sqrt{n}$. Keďže a^2 je prirodzené číslo väčšie ako n, musí spolu platiť

$$(a - 0{,}01)^2 \leqq n \leqq a^2 - 1.$$

Po úprave nerovnosti medzi krajnými výrazmi vyjde

$$\frac{1}{50}a \geqq 1{,}000\,1, \quad \text{čiže} \quad a \geqq 50{,}005.$$

Keďže je číslo a celé, vyplýva z toho $a \geqq 51$. A keďže

$$(51 - 0{,}01)^2 = 2\,601 - \frac{102}{100} + \frac{1}{100^2} \in (2\,599, 2\,600),$$

je hľadaným číslom $n = 2\,600$.

Poznámka. Za správne riešenie možno uznať aj riešenie pomocou kalkulačky. Ak majú totiž byť za desatinnou čiarkou dve deviatky, musí byť číslo n veľmi blízko zľava k nejakej druhej mocnine. Preto stačí na kalkulačke vyskúšať čísla $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{15}$ atď. Keďže $51^2 = 2\,601$, nájdeme, že $\sqrt{2\,600} = 50{,}990\,195\ldots$

Prácnejšou úlohou by bolo nájsť najmenšie číslo n, pre ktoré za desatinnou čiarkou iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ sú dve osmičky, či dve sedmičky a pod.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ak nie je prirodzené číslo n druhou mocninou iného prirodzeného čísla, dokážte, že $\sqrt{n}$ je číslo iracionálne.

N2. Nájdite pomocou kalkulačky najmenšie prirodzené číslo n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasleduje bezprostredne za desatinnou čiarkou deviatka. [$\sqrt{35} = 5{,}916\,079\ldots$]

N3. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasleduje bezprostredne za desatinnou čiarkou deviatka.

N4. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasledujú bezprostredne za desatinnou čiarkou dve nuly. [$\sqrt{2\,501} = 50{,}009\,999\ldots$]

N5. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n také, že v zápise iracionálneho čísla $\sqrt{n}$ nasledujú bezprostredne za desatinnou čiarkou dve rovnaké cifry. [Na kalkulačke $\sqrt{43} = 6{,}557\,438\ldots$]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014