64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015

Riešenia úloh školského kola kategórie B

1. *Predpokladajme, že prirodzené číslo a má 15 kladných deliteľov. Koľko ich môže mať prirodzené číslo b, ak najmenší spoločný násobok čísel a a b má 20 kladných deliteľov?* (Jaromír Šimša)

Riešenie. V domácom kole sme ukázali, že prirodzené číslo, ktorého rozklad na súčin prvočísel je $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$, pričom $p_1, p_2, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla a $a_1, a_2, \dots, a_k$ prirodzené čísla, má práve $(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$ kladných deliteľov.

Existuje jediný rozklad čísla 15 na súčin niekoľkých prirodzených čísel väčších ako 1, a to $15 = 3 \cdot 5$. Keďže číslo a má 15 deliteľov, je jeho rozklad na súčin prvočísel tvaru

$$p_1^{14} \quad \text{alebo} \quad p_2^2p_3^4,$$

pričom p_1, $p_2 \neq p_3$ sú prvočísla. Všetky rozklady čísla 20 na súčin niekoľkých prirodzených čísel väčších ako 1 sú $20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. Keďže najmenší spoločný násobok n oboch čísel a a b má 20 deliteľov, je jeho rozklad na súčin prvočísel tvaru

$$q_1^{19}, \quad q_2q_3^9, \quad q_4^3q_5^4 \quad \text{nebo} \quad q_6q_7q_8^4,$$

pričom q_1, $q_2 \neq q_3$, $q_4 \neq q_5$, $q_6 \neq q_7 \neq q_8 \neq q_6$ sú prvočísla.

Číslo a je však zároveň deliteľom čísla n. To nastane iba v nasledujúcich prípadoch:

a) $p_1 = q_1$, teda $a = p_1^{14}$ a $n = p_1^{19}$. Vyhovuje iba $b = p_1^{19}$, a číslo b má tak práve 20 kladných deliteľov.

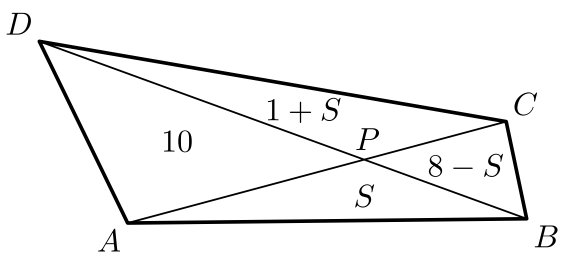
b) $p_2 = q_4$ a $p_3 = q_5$, teda $a = p_2^2p_3^4$ a $n = p_2^3p_3^4$, čiže $b = p_2^3p_3^\alpha$, pričom $\alpha \in \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Číslo b má v tomto prípade $4(1+\alpha)$ deliteľov, čo sú všetky čísla z množiny $\{4, 8, 12, 16, 20\}$.

Záver. Číslo b môže mať 4, 8, 12, 16 alebo 20 deliteľov.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Z toho za výpis všetkých možností prvočíselného rozkladu čísel a a n dajte po 1 bode, za nájdenie všetkých možností, kedy $a \mid n$, dajte 1 bod, za nájdenie všetkých možných tvarov čísla b dajte v prípadoch a) a b) po 1 bode a napokon 1 bod dajte za určenie všetkých možných počtov deliteľov čísla b. Riešenie, v ktorom je jeden z prípadov a) alebo b) zabudnutý, oceňte nanajvýš 2 bodmi.

2. *Označme P priesečník uhlopriečok konvexného štvoruholníka ABCD. Vypočítajte jeho obsah, ak obsahy trojuholníkov ABC, BCD a DAP sú postupne* $8\,\mathrm{cm}^2$, $9\,\mathrm{cm}^2$, $10\,\mathrm{cm}^2$. (Pavel Novotný)

Riešenie. Označme S_{XYZ} obsah trojuholníka XYZ vyjadrený v cm^2 a ďalej označme $S = S_{ABP}$. Podľa zadania platí $S_{ADP} = 10$, $S + S_{BCP} = 8$, $S_{BCP} + S_{CDP} = 9$. Z druhej rovnosti vyplýva $S_{BCP} = 8 - S$, dosadením do tretej rovnosti potom vyjde $S_{CDP} = 1 + S$ (obr. 1).



Obr. 1

Trojuholníky ABP a ADP majú zhodnú výšku z vrcholu A. Pre pomer ich obsahov preto platí $S : S_{ADP} = |BP| : |DP|$. Podobne pre trojuholníky BCP a CDP dostaneme $S_{BCP} : S_{CDP} = |BP| : |DP|$. Z toho už vyplýva $S : S_{ADP} = S_{BCP} : S_{CDP}$, čo vzhľadom na odvodené vzťahy znamená

$$\frac{S}{10} = \frac{8-S}{1+S}.$$

Po úprave tak dostaneme pre S kvadratickú rovnicu

$$S^2 + 11S - 80 = (S+16)(S-5) = 0,$$

ktorá má dva korene -16 a 5. Keďže obsah S trojuholníka ABP je nezáporné číslo, vyhovuje iba $S = 5$. Odtiaľ už ľahko dopočítame z vyššie uvedených vzťahov $S_{BCP} = 3$ a $S_{CDP} = 6$. Obsah celého štvoruholníka $ABCD$ vyjadrený v cm^2 teda je

$$S + S_{BCP} + S_{CDP} + S_{ADP} = 5 + 3 + 6 + 10 = 24.$$

Záver. Obsah štvoruholníka $ABCD$ je $24\,\mathrm{cm}^2$.

Iné riešenie. Dĺžky úsečiek PA, PB, PC, PD (vyjadrené v cm) označíme postupne a, b, c, d. Podľa známeho vzorca $S = \frac{1}{2}uv\sin\omega$ pre obsah trojuholníka, ktorého strany dĺžok u a v zvierajú uhol veľkosti ω, vyjadríme podmienky úlohy rovnosťami

$$8 = \frac{1}{2}ab\sin\varphi + \frac{1}{2}bc\sin(\pi-\varphi), \quad 9 = \frac{1}{2}bc\sin(\pi-\varphi) + \frac{1}{2}cd\sin\varphi, \quad 10 = \frac{1}{2}da\sin(\pi-\varphi),$$

pričom $\varphi = |\measuredangle APB|$. Pre jednoduchší zápis položíme $k = \frac{1}{2}\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(\pi-\varphi)$. Dostaneme tak sústavu rovníc

$$8 = kab + kbc, \quad 9 = kbc + kcd, \quad 10 = kda, \tag{1}$$

z ktorej budeme hľadať obsah S štvoruholníka $ABCD$, ktorý bude v cm^2 vyjadrený vzorcom

$$S = kab + kbc + kcd + kda. \tag{2}$$

Najskôr vhodnou kombináciou druhej a tretej rovnice (1) vylúčime d:

$$9a - 10c = kabc. \tag{3}$$

Kombináciou tejto rovnice s prvou rovnicou (1), ktorej pravú stranu upravíme na súčin $kb(a+c)$, vylúčime b:

$$(9a-10c)(a+c) - 8ac = 0.$$

Vďaka identite

$$(9a-10c)(a+c) - 8ac = 9a^2 - 9ac - 10c^2 = (3a-5c)(3a+2c)$$

tak vidíme, že pre (kladné) čísla a, c platí $3a = 5c$ čiže $9a = 15c$, a preto rovnosť (3) možno prepísať ako $5c = kabc$, odkiaľ $kab = 5$. Z rovností (1) potom vyplýva $kbc = 3$ a $kcd = 6$, čo všetko po dosadení do (2) spolu s hodnotou $kda = 10$ vedie k výsledku $S = 24$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za vyjadrenie obsahu pomocou jedného z troch trojuholníkov ABP, BCP či CDP, 2 body za zdôvodnenie úmery medzi obsahmi štyroch trojuholníkov, 1 bod za zostavenie zodpovedajúce rovnice a 1 bod za jej vyriešenie. Ak riešiteľ správne vypočíta obsah iba pre špeciálne zvolený vyhovujúci štvoruholník $ABCD$ (napríklad s navzájom kolmými uhlopriečkami), dajte nanajvýš 2 body.

3. *Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí*

$$\frac{ab}{a^2-ab+b^2}+\frac{bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{ca}{c^2-ca+a^2} \leqq 3.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť. (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Najskôr dokážeme pre ľubovoľné $a, b > 0$ jednoduchšiu nerovnosť

$$\frac{ab}{a^2-ab+b^2} \leqq 1. \tag{1}$$

Menovateľ zlomku na ľavej strane je zrejme kladný, pretože

$$a^2-ab+b^2=(a-\tfrac{1}{2}b)^2+\tfrac{3}{4}b^2>0.$$

Ak ním teda vynásobíme obe strany tejto nerovnosti, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$ab \leqq a^2-ab+b^2,$$

ktorá je ekvivalentná so zrejmou nerovnosťou $0 \leqq (a-b)^2$. Preto platí aj nerovnosť (1) a rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď $a=b$.

Zámenou premenných (a, b) v nerovnosti (1) premennými (b, c), (c, a) dostaneme postupne nerovnosti

$$\frac{bc}{b^2-bc+c^2} \leqq 1, \tag{2}$$

$$\frac{ca}{c^2-ca+a^2} \leqq 1, \tag{3}$$

v ktorých nastane rovnosť práve vtedy, keď postupne platí $b=c$ a $c=a$.

Sčítaním nerovností (1), (2) a (3) potom dostaneme dokazovanú nerovnosť

$$\frac{ab}{a^2-ab+b^2}+\frac{bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{ca}{c^2-ca+a^2} \leqq 3.$$

Rovnosť v nej nastane práve vtedy, keď nastane rovnosť vo všetkých troch použitých nerovnostiach, t. j. práve vtedy, keď $a=b=c$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za konštatovanie, že stačí dokázať nerovnosť (1), dajte 2 body, za jej úplný dôkaz či odkaz na šiestu úlohu domáceho kola dajte ďalšie dva body. Ak študent zabudne uviesť, že menovateľ zlomku na ľavej strane je kladný, strhnite 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 14. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015