64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned}|1-x| &= y+1,\\ |1+y| &= z-2,\\ |2-z| &= x-x^2.\end{aligned}$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Pravá strana prvej rovnice je nezáporné číslo, čo sa premietne do druhej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Aj pravá strana druhej rovnice je nezáporné číslo, čo sa s využitím rovnosti $|z-2| = |2-z|$ premietne do tretej rovnice, pričom môžeme odstrániť absolútnu hodnotu. Daná sústava má potom tvar

$$\begin{aligned}|1-x| &= y+1,\\ 1+y &= z-2,\\ z-2 &= x-x^2\end{aligned}$$

a odtiaľ jednoduchým porovnaním dostávame rovnicu

$$|1-x| = x-x^2.$$

Pre $x < 1$ dostaneme rovnicu $1-x = x-x^2$ čiže $(1-x)^2 = 0$, ktorej riešenie $x = 1$ ale predpokladu $x < 1$ nevyhovuje.

Pre $x \geqq 1$ vyjde rovnica $x^2 = 1$; z jej dvoch riešení $x = -1$ a $x = 1$ predpokladu $x \geqq 1$ vyhovuje iba $x = 1$.

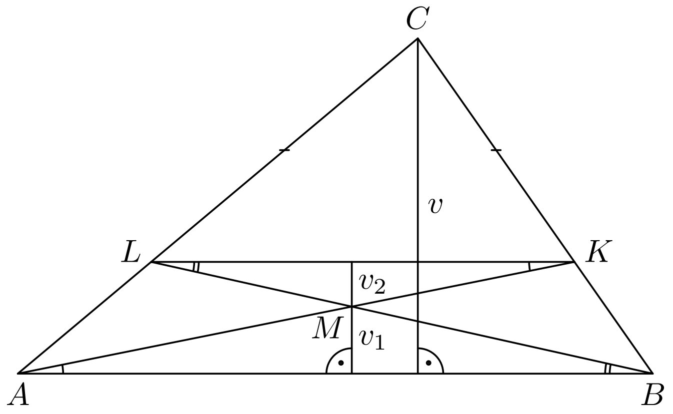
Z danej sústavy potom jednoducho dopočítame hodnoty $y = -1$ a $z = 2$. Sústava má teda jediné riešenie $(x, y, z) = (1, -1, 2)$.

Za systematické a úplné riešenie dajte 6 bodov. Za uhádnutie riešenia $(1, -1, 2)$ dajte jeden bod.

---

2. *Označme K a L postupne body strán BC a AC trojuholníka ABC, pre ktoré platí $|BK| = \frac{1}{3}|BC|$, $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Nech M je priesečník úsečiek AK a BL. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníkov ABM a ABC.* (Pavel Novotný)

Riešenie. Označme v výšku trojuholníka ABC na stranu AB, v_1 výšku trojuholníka ABM na stranu AB a v_2 výšku trojuholníka KLM na stranu KL (obr. 1). Z podobnosti trojuholníkov LKC a ABC (zaručenej vetou *sus*) vyplýva, že $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$. Z porovnania ich výšok zo spoločného vrcholu C vidíme, že výška v trojuholníka ABC je rovná trojnásobku vzdialenosti priečky KL od strany AB, teda $v = 3(v_1+v_2)$. Keďže AK a BL sú priečky rovnobežiek KL a AB, vyplýva zo zhodnosti prislúchajúcich striedavých uhlov podobnosť trojuholníkov ABM a KLM.



Obr. 1

Keďže $|KL| = \frac{2}{3}|AB|$, je tiež $v_2 = \frac{2}{3}v_1$, a preto $v_1 + v_2 = \frac{5}{3}v_1$, čiže

$$v = 3(v_1 + v_2) = 5v_1.$$

Trojuholníky ABM a ABC majú spoločnú stranu AB, preto ich obsahy sú v pomere výšok na túto stranu, takže obsah trojuholníka ABC je päťkrát väčší ako obsah trojuholníka ABM.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za určenie pomeru podobnosti trojuholníkov ABM a KLM dajte 2 body, za určenie pomeru podobnosti trojuholníkov ABC a LKC dajte 2 body, za záverečné odvodenie pomeru obsahov trojuholníkov ABM a ABC dajte 2 body.

---

3. *Nájdite najmenšie prirodzené číslo n s ciferným súčtom 8, ktoré sa rovná súčinu troch rôznych prvočísel, pričom rozdiel dvoch najmenších z nich je 8.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Hľadané číslo n je súčinom troch rôznych prvočísel, ktoré označíme p, q, r, $p < q < r$. Číslo $n = pqr$ má ciferný súčet 8, ktorý nie je deliteľný tromi, preto ani n nie je deliteľné tromi. Napokon hľadané číslo n nie je deliteľné ani dvoma, pretože by muselo byť $p = 2$ a $q = p + 8 = 10$, čo nie je prvočíslo. Musí teda byť $p \geqq 5$.

Ak je $p = 5$, je $q = p + 8 = 13$, takže $r \in \{17, 19, 23, 29, 31, \ldots\}$ a $n \in \{1\,105, 1\,235, 1\,495, 1\,885, 2\,015, \ldots\}$. V tejto množine je zrejme najmenšie číslo s ciferným súčtom 8 číslo 2 015.

Ak je $p > 5$, je $p = 11$ najmenšie prvočíslo také, že aj $q = p + 8$ je prvočíslo. Preto $p \geqq 11$, $q \geqq 19$, a teda $r \geqq 23$, takže pre zodpovedajúce čísla n platí $n \geqq 11 \cdot 19 \cdot 23 = 4\,807 > 2\,015$.

Hľadané číslo je $n = 2\,015$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za skusmé nájdenie čísla $n = 2\,015$ dajte 2 body. Ak nebude dokázané, že pre $p > 5$ neexistuje menšie vyhovujúce n, strhnite 2 body.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 14. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015