64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

<u>*Informácia pre krajskú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

---

1. *Peter, Martin a Juraj triafali do zvláštneho terča, ktorý mal iba tri políčka s navzájom rôznymi hodnotami. Každý z chlapcov hádzal celkom desaťkrát a vždy trafil do terča. Bodový zisk z prvých ôsmich hodov mali všetci traja chlapci rovnaký. Pri posledných dvoch hodoch trafil Juraj dvakrát políčko s najnižšou možnou hodnotou, Martin dvakrát políčko so strednou hodnotou a Peter dvakrát políčko s najvyššou hodnotou. Aritmetický priemer všetkých Martinových hodov bol o 1 väčší ako Jurajov priemer a Petrov priemer bol o 1 väčší ako Martinov priemer. Určte všetky možné hodnoty políčok na terči, ak viete, že jedna z nich bola 12.* (Erika Novotná)

Riešenie. Aritmetický priemer všetkých Martinových hodov bol o 1 väčší ako priemer Jurajov a každý z chlapcov hádzal spolu desaťkrát. Preto bol Martinov celkový súčet o 10 väčší ako súčet Jurajov. Tieto celkové súčty sa pritom líšili iba o súčty posledných dvoch zásahov – Juraj trafil dvakrát políčko s najmenšou možnou hodnotou, Martin dvakrát políčko so strednou hodnotou. Preto bolo políčko so strednou hodnotou o 5 väčšie ako políčko s najmenšou hodnotou.

Podobným spôsobom možno zdôvodniť, že políčko s najväčšou hodnotou bolo o 5 väčšie ako políčko so strednou hodnotou. Jedna z hodnôt týchto troch políčok bola 12, nevieme však, či to bola tá najmenšia, stredná alebo najväčšia. Do úvahy prichádzajú nasledujúce tri možnosti hodnôt políčok na terči:

- 12, 17, 22,
- 7, 12, 17,
- 2, 7, 12.

Poznámka. Súčet prvých ôsmich hodov ktoréhokoľvek z chlapcov označme S a neznáme hodnoty na terči postupne j, m a p, pričom $j < m < p$. Pri tomto označení možno začiatok predchádzajúceho riešenia zapísať nasledovne:

$$\begin{aligned}\frac{S+2m}{10} &= \frac{S+2j}{10}+1,\\ 2m &= 2j+10,\\ m &= j+5.\end{aligned}$$

Podobným spôsobom možno zdôvodniť, že $p = m + 5$.

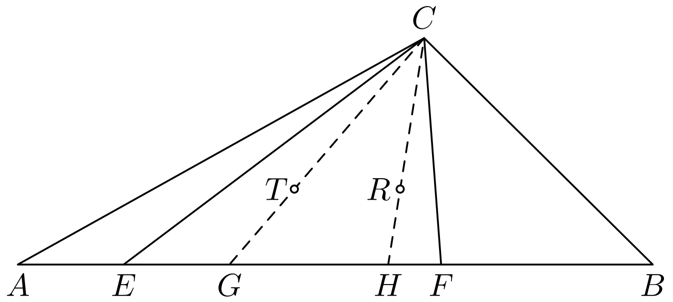
Návrh hodnotenia. 4 body za objav a zdôvodnenie závislostí medzi hodnotami políčok na terči; 2 body za uvedenie všetkých troch možností hodnôt na terči.

2. *V trojuholníku ABC ležia na strane AB body E a F. Obsah trojuholníka AEC je $1\,\mathrm{cm}^2$, obsah trojuholníka EFC je $3\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojuholníka FBC je $2\,\mathrm{cm}^2$. Bod T je ťažiskom trojuholníka AFC a bod G je priesečníkom priamok CT a AB. Bod R je ťažiskom trojuholníka EBC a bod H je priesečníkom priamok CR a AB. Určte obsah trojuholníka GHC.* (Eva Patáková)

Riešenie. Podmienkam zo zadania vyhovuje jediné usporiadanie bodov E a F na úsečke AB, pozri obrázok. Obsah trojuholníka ABC je rovný súčtu obsahov trojuholníkov AEC, EFC a FBC, t. j.

$$S_{ABC} = S_{AEC} + S_{EFC} + S_{FBC} = 1 + 3 + 2 = 6\,(\mathrm{cm}^2).$$

Ten istý obsah možno vyjadriť ako súčet obsahov trojuholníkov AGC, GHC a HBC. Obsah prvého a tretieho trojuholníka odvodíme zo zadania, potom ľahko určíme obsah trojuholníka GHC.



Úsečka CG je ťažnicou trojuholníka AFC, a tá delí tento trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom. Pritom obsah trojuholníka AFC je súčtom obsahov trojuholníkov AEC a EFC, ktoré poznáme. Platí teda

$$S_{AGC} = \frac{1}{2}(S_{AEC} + S_{EFC}) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Podobným spôsobom možno zdôvodniť, že obsah trojuholníka HBC je rovný

$$S_{HBC} = \frac{1}{2}(S_{EFC} + S_{FBC}) = \frac{1}{2}(3 + 2) = 2{,}5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Obsah trojuholníka GHC je preto rovný

$$S_{GHC} = S_{ABC} - S_{AGC} - S_{HBC} = 6 - 2 - 2{,}5 = 1{,}5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Všetky diskutované trojuholníky majú spoločnú výšku zo spoločného vrcholu C. Preto sú pomery obsahov ktorýchkoľvek dvoch trojuholníkov rovnaké ako pomery veľkostí strán, ktoré sú protiľahlé vrcholu C. Na určenie obsahu trojuholníka GHC preto stačí určiť pomer dĺžky strany GH vzhľadom k dĺžke strany niektorého z trojuholníkov so známym obsahom:

Ak napr. označíme $|AE| = a$, tak $|EF| = 3a$ a $|FB| = 2a$. Keďže CG je ťažnicou trojuholníka AFC, je bod G stredom úsečky AF. Veľkosť tejto úsečky je $|AF| = |AE| + |EF| = 4a$, teda $|AG| = \frac{1}{2}|AF| = 2a$. Podobne sa zdôvodní, že $|HB| = \frac{1}{2}(|EF| + |FB|) = 2{,}5a$. Veľkosť úsečky GH je preto rovná

$$|GH| = |AB| - |AG| - |HB| = (6 - 2 - 2{,}5)a = 1{,}5a.$$

Odtiaľ vyplýva, že $S_{GHC} = 1{,}5 \cdot S_{AEC} = 1{,}5\,\mathrm{cm}^2$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za usporiadanie bodov E a F na úsečke AB (stačí náčrt); 2 body za zistenie, že úsečka CG, resp. CH delí trojuholník AFC, resp. EBC na dva trojuholníky s rovnakým obsahom; 3 body za odvodenie hľadaného obsahu.

---

3. *Určte, aká je posledná cifra súčinu všetkých párnych prirodzených čísel, ktoré sú menšie ako 100 a ktoré nie sú násobkami 10.* (Marta Volfová)

Riešenie. Posledná cifra súčinu je daná len poslednými ciframi činiteľov. Pri riešení úlohy preto budeme vo výpočtoch uvažovať iba posledné cifry. Podľa zadania násobíme desať štvoríc činiteľov a v každej z nich sú činitele končiace ciframi 2, 4, 6 a 8. Súčin $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ má na mieste jednotiek cifru 4. Pre zistenie poslednej cifry výsledku násobenia desiatich takých štvoríc stačí vynásobiť desať štvoriek a pri násobení sledovať iba poslednú cifru:

Súčin $4 \cdot 4$ končí cifrou 6, preto namiesto násobenia desiatich štvoriek stačí vynásobiť päť šestiek. Číslo 6 násobené sebou samým dá opäť číslo končiace cifrou 6, a preto súčin piatich šestiek, a teda aj desiatich štvoriek končí cifrou 6. Hľadaná cifra je 6.

Iné riešenie. Opäť uvažujeme v súčinoch len posledné cifry. Máme zadaných desať činiteľov končiacich cifrou 2, desať končiacich cifrou 4, desať končiacich cifrou 6 a desať končiacich cifrou 8. Postupne budeme uvažovať o každých desiatich činiteľoch:

Pri násobení $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ sledujeme iba cifry na mieste jednotiek a zistíme, že výsledok končí cifrou 4. Podobne zistíme, že súčin $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$ končí cifrou 6, súčin $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ končí cifrou 6 a súčin $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ končí cifrou 4. Poslednú cifru hľadaného súčinu určíme vynásobením práve zistených cifier, tzn. $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4$. Tento súčin končí cifrou 6, teda hľadaná cifra je 6.

Návrh hodnotenia. 1 bod za objav, že stačí uvažovať iba posledné cifry činiteľov; 4 body za medzivýsledky a ich zdôvodnenie (napr. 2 body za poslednú cifru súčinu $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ a 2 body za poslednú cifru mocniny 4^{10}); 1 bod za hľadanú cifru 6.

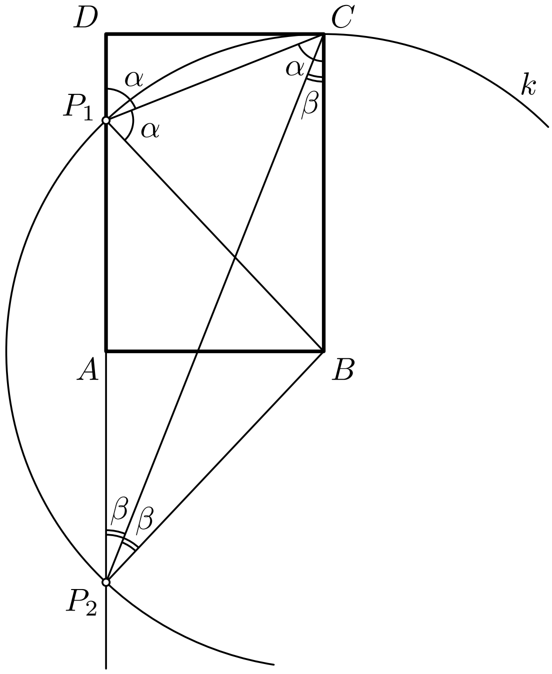
---

4. *Daný je obdĺžnik $ABCD$, ktorého kratšia strana je AB. Určte, pre ktoré body P na priamke AD platí, že os uhla BPD prechádza bodom C. Svoje tvrdenie zdôvodnite a popíšte, ako by ste všetky také body zostrojili.* (L. Růžičková)

Riešenie. Striedavé uhly určené priečkou PC dvoch rovnobežných priamok AD a BC sú zhodné. Pritom bod P určite leží na polpriamke DA. (Keby totiž ležal na opačnej polpriamke, tak by bod C ležal mimo uhol BPD a os tohto uhla by nemohla bodom C prechádzať.) Preto sú uhly DPC a PCB zhodné.

Podľa zadania je priamka PC osou uhla BPD, preto sú aj uhly DPC a CPB zhodné. Trojuholník CPB má teda dva zhodné vnútorné uhly pri vrcholoch C a P, preto je tento trojuholník rovnoramenný s ramenami BC a BP.

Z uvedeného vyplýva, že bod P je priesečníkom polpriamky DA a kružnice so stredom v bode B a polomerom $|BC|$. Vzhľadom na podmienku $|AB| < |BC|$ táto kružnica polpriamku DA pretína, a to v dvoch rôznych bodoch (z ktorých jeden je vnútorným bodom úsečky AD).



Návrh hodnotenia. 2 body za objav a zdôvodnenie zhodnosti uhlov DPC a PCB; 2 body za objav a zdôvodnenie vzťahu $|BP| = |BC|$; 2 body za doriešenie úlohy vrátane diskusie o počte riešení.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, Ivan Cimrák, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Ivan Cimrák, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015