2014/2015
64. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie B*

(*Súťaž sa konala v utorok 31. marca 2015.*)

1. Súčin všetkých kladných deliteľov prirodzeného čísla n je 20^{15}. Určte n.
(*Pavel Calábek*)

2. Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$V = x^2 + \frac{2}{1+2x^2},$$

pričom x je ľubovoľné reálne číslo. Pre ktoré x výraz V túto hodnotu nadobúda?
(*Jaroslav Švrček*)

3. Dokážte, že priesečník výšok a ťažisko daného ostrouhlého trojuholníka ABC majú rovnakú vzdialenosť od strany AB práve vtedy, keď pre vnútorné uhly α, β pri vrcholoch A, B platí rovnosť $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 3$. (*Jaromír Šimša*)

4. Na tabuli je zoznam čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$ a „rovnica“

$$\frac{\square}{\square}x^2 + \frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square} = 0.$$

Marek s Tomášom hrajú nasledujúcu hru. Najskôr Marek vyberie ľubovoľné číslo zo zoznamu, napíše ho do jedného z prázdnych políčok v „rovnici“ a číslo zo zoznamu zotrie. Potom Tomáš vyberie niektoré zo zvyšných čísel, napíše ho do iného prázdneho políčka a v zozname ho zotrie. Nato Marek urobí to isté a nakoniec Tomáš doplní tri zvyšné čísla na tri zvyšné voľné políčka v „rovnici“. Marek vyhrá, ak vzniknutá kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi bude mať dva rôzne reálne korene, inak vyhrá Tomáš. Rozhodnite, ktorý z hráčov môže vyhrať nezávisle na postupe druhého hráča. (*Pavel Calábek*)