64. ročník Matematickej olympiády
2014/2015 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

---

1. *Písmenkový logik je hra pre dvoch hráčov, ktorá má nasledujúce pravidlá:*

1. *Prvý hráč si myslí slovo zložené z piatich písmen, v ktorom sa žiadne písmeno neopakuje.*
2. *Druhý hráč napíše nejaké slovo z piatich písmen.*
3. *Prvý hráč odpovie dvoma číslami – prvé číslo udáva, koľko písmen napísaného slova sa zhoduje s mysleným slovom, t. j. stoja zároveň na správnom mieste; druhé číslo udáva, koľko písmen napísaného slova je obsiahnutých v myslenom slove, ale nestoja na správnom mieste.*
4. *Kroky 2 a 3 sa opakujú, kým druhý hráč myslené slovo neuhádne.*

Záznam jednej hry dvoch kamarátov vyzeral nasledovne:

SONET	*1*	*2*
MUDRC	*0*	*2*
PLAST	*0*	*2*
KMOTR	*0*	*4*
ATOLY	*1*	*1*
DOGMA	*0*	*2*

V nasledujúcom ťahu bolo myslené slovo uhádnuté. Určte, ktoré slovo to bolo.
(*Marta Volfová*)

Nápad. Najskôr určte, ktoré písmená sa v hľadanom slove vyskytujú, resp. nevyskytujú.

Riešenie. Najskôr určíme, ktoré písmená sa v myslenom slove vyskytujú, potom rozhodneme, na ktorých miestach.

Zo záznamu hry vidíme, že v slove SONET sa vyskytujú tri a v slove MUDRC dve hľadané písmená. Vzhľadom na to, že tieto dve slová nemajú žiadne písmeno spoločné, hľadaná pätica písmen sa nachádza len medzi písmenami

S, O, N, E, T, M, U, D, R, C.

Preto dve z hľadaných písmen, ktoré sú súčasne v slove PLAST, sú práve písmená S a T. Z rovnakého dôvodu sú štyri z hľadaných písmen, ktoré sú súčasne v slove KMOTR, práve písmená M, O, T a R. Hľadaná pätica písmen je

S, M, O, T, R.

Všetky ostatné písmená v uvedenom zázname hry odstránime a budeme uvažovať o poradí písmen v hľadanom slove.

S O _ _ T	1	2
M _ _ R _	0	2
_ _ _ S T	0	2
_ M O T R	0	4
_ T O _ _	1	1
_ O _ M _	0	2

V piatom riadku sú iba dve písmená, z ktorých jedno je na správnom mieste. Písmeno O to byť nemôže, pretože na rovnakom mieste sa vyskytuje aj v riadku predchádzajúcom, kde však na správnom mieste nie je žiadne z napísaných písmen. Preto je na správnom mieste písmeno T a môžeme začať dopĺňať hľadané slovo:

_ T _ _ _ .

Jedno z písmen v prvom riadku je tiež na správnom mieste. Písmeno O to byť nemôže, pretože druhé miesto je už obsadené. Písmeno T to tiež byť nemôže, pretože na rovnakom mieste sa vyskytuje aj v treťom riadku, kde na správnom mieste nie je žiadne z písmen. Preto musí byť na správnom mieste písmeno S:

S T _ _ _ .

Z druhého a štvrtého riadku vieme, že písmeno R nemôže byť na štvrtom ani na piatom mieste. Prvé dve miesta sú už obsadené, preto R musí byť na treťom mieste:

S T R _ _ .

Z posledného riadku vieme, že písmeno M nemôže byť na štvrtom mieste. Prvé tri miesta sú obsadené, preto je M na piatom mieste a pre O ostáva miesto štvrté. Hľadané slovo je

STROM.

---

2. *Súčet všetkých deliteľov istého nepárneho čísla je* 78. *Určte, aký je súčet všetkých deliteľov dvojnásobku tohto neznámeho čísla.* (*Karel Pazourek*)

Nápad. Ako sa líšia všetky delitele pôvodného čísla a jeho dvojnásobku?

Riešenie. Neznáme číslo označíme N. Ľubovoľný deliteľ čísla $2N$ má tvar $c \cdot d$, pričom c je nejaký deliteľ čísla 2 a d je nejaký deliteľ čísla N. Jediné delitele čísla 2 sú 1 a 2, delitele čísla N sú 1, N, príp. ešte nejaké ďalšie čísla

$$d_1, d_2, \dots , d_k,$$

o ktorých predpokladáme, že sú navzájom rôzne. Delitele čísla $2N$ teda patria do množiny

$$\{1, d_1, d_2, \dots , d_k, N, 2, 2d_1, 2d_2, \dots , 2d_k, 2N\} \tag{1}$$

a podmienka zo zadania znamená

$$1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_k + N = 78.$$

Keďže číslo N je nepárne, musia byť nepárne aj všetky jeho delitele 1, d_1, d_2, …, d_k, N. Naopak, všetky čísla $2, 2d_1, 2d_2, \ldots, 2d_k, 2N$ sú párne, takže prvky množiny (1) sú navzájom rôzne čísla. Súčet všetkých deliteľov čísla $2N$ je preto rovný

$$1+d_1+\cdots+d_k+N+2+2d_1+\cdots+2d_k+2N = 3\cdot(1+d_1+\cdots+d_k+N) = 3\cdot 78 = 234.$$

Iné riešenie. Každé číslo je deliteľné sebou samým a číslom 1. Preto neznáme číslo, ktoré má súčet všetkých svojich deliteľov rovný 78, musí byť menšie ako 78. Vyskúšaním všetkých nepárnych čísel od 1 do 77 zistíme, že túto vlastnosť má iba číslo 45. Dvojnásobkom je číslo 90 a jeho delitele sú:

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 15,\ 18,\ 30,\ 45,\ 90.$$

Súčet týchto deliteľov je 234.

---

3. *V lichobežníku $KLMN$ platí, že*

- *strany KL a MN sú rovnobežné,*
- *úsečky KL a KM sú zhodné,*
- *úsečky KN, NM a ML sú navzájom zhodné.*

Určte veľkosť uhla KNM. (*Libuše Hozová*)

Nápad. Aký je súčet veľkostí uhlov KNM a KLM?

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že lichobežník $KLMN$ je rovnoramenný a navyše je uhlopriečkou KM rozdelený na dva rovnoramenné trojuholníky. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v každom z týchto trojuholníkov je rovný 180°; súčet veľkostí vnútorných uhlov v danom lichobežníku je rovný $2 \cdot 180° = 360°$. Veľkosť hľadaného uhla KNM označíme α. Pomocou neznámej α budeme vyjadrovať veľkosti ostatných uhlov v lichobežníku, kým nebudeme schopní túto neznámu určiť.

Keďže lichobežník $KLMN$ je rovnoramenný, sú vnútorné uhly pri vrcholoch N a M, resp. K a L zhodné, t. j.

$$\alpha = |\measuredangle KNM| = |\measuredangle LMN|, \quad \text{resp.} \quad |\measuredangle LKN| = |\measuredangle KLM|.$$

Súčet veľkostí všetkých týchto uhlov je 360°, preto je súčet ktorýchkoľvek dvoch nezhodných uhlov rovný 180°, teda

$$|\measuredangle LKN| = |\measuredangle KLM| = 180° - \alpha.$$

Keďže trojuholník KLM je rovnoramenný, sú vnútorné uhly pri základni zhodné, tzn.

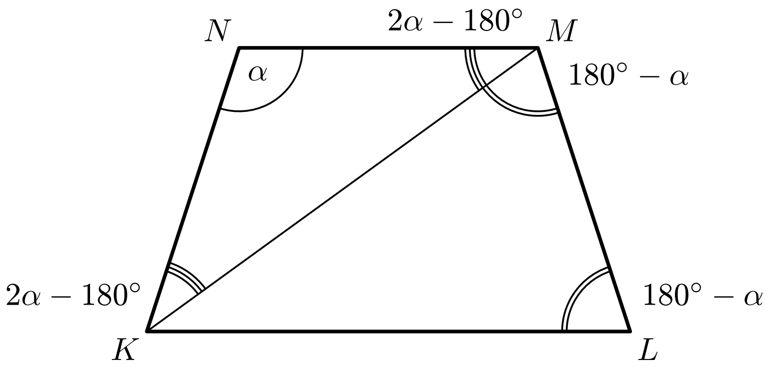
$$|\measuredangle KML| = |\measuredangle KLM| = 180° - \alpha.$$

Uhol KMN je rozdielom uhlov LMN a KML, platí teda

$$|\measuredangle KMN| = \alpha - (180° - \alpha) = 2\alpha - 180°.$$

Keďže trojuholník KMN je rovnoramenný, sú vnútorné uhly pri základni zhodné, teda

$$|\measuredangle MKN| = |\measuredangle KMN| = 2\alpha - 180^\circ.$$



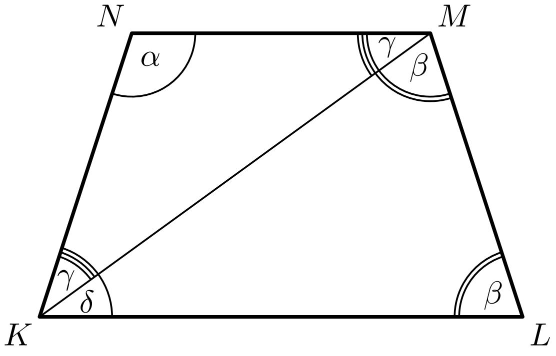
Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku KMN je 180°, dostávame tak rovnicu s neznámou α, ktorú doriešime:

$$\begin{aligned} 5\alpha - 360^\circ &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 540^\circ, \\ \alpha &= 108^\circ. \end{aligned}$$

Veľkosť uhla KNM je 108°.

Poznámka. Pri označení ako na nasledujúcom obrázku môžeme všetky vyššie uvedené podmienky sformulovať takto:

$$\alpha + 2\gamma = \delta + 2\beta = 180^\circ, \quad \beta + \gamma = \alpha, \quad \gamma + \delta = \beta.$$



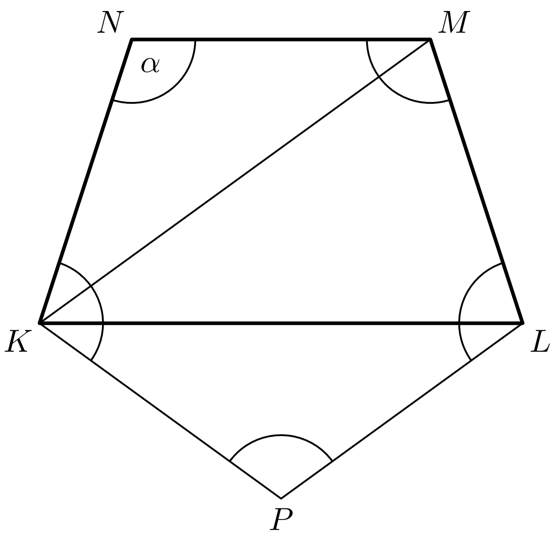
S týmito podmienkami môžeme pracovať veľmi rôznorodo a niekedy môže byť výhodné vyjadriť veľkosti niektorých ďalších uhlov. Pre kontrolu uvádzame veľkosti všetkých vyznačených uhlov:

$$\alpha = 108^\circ, \quad \beta = 72^\circ, \quad \gamma = \delta = 36^\circ.$$

Iné riešenie. Lichobežník $KLMN$ sa dá doplniť na päťuholník $KPLMN$ tak, aby

$$|LP| = |PK| = |KN| = |NM| = |ML|.$$

Zo zadania vyplýva, že päťuholník $KPLMN$ je pravidelný. (Keďže $|KL| = |KM|$, sú trojuholníky LPK a KNM zhodné. Lichobežníky $KLMN$ a $KMLP$ sú teda tiež zhodné, a preto sú všetky vnútorné uhly v päťuholníku $KPLMN$ rovnaké.)



Uhlopriečky KM a KL delia tento päťuholník na tri trojuholníky. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v každom z týchto trojuholníkov je rovný $180°$; súčet veľkostí vnútorných uhlov v päťuholníku $KPLMN$ je rovný $3 \cdot 180° = 540°$. Keďže sú všetky vnútorné uhly zhodné, má každý z nich veľkosť

$$\frac{540°}{5} = 108°.$$

Veľkosť uhla KNM je $108°$.

Poznámka. Obe uvedené riešenia boli založené na vete o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku. Z toho sme určili súčet vnútorných uhlov v špecifickom štvoruholníku, resp. päťuholníku. Všeobecne platí, že súčet veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom n-uholníku je rovný $(n-2) \cdot 180°$.

---

4. *Adam má plnú krabicu guľôčok, ktoré sú veľké alebo malé, čierne alebo biele. Pomer počtu veľkých a malých guľôčok je* $5 : 3$. *Medzi veľkými guľôčkami je pomer počtu čiernych a bielych guľôčok* $1 : 2$, *medzi malými guľôčkami je pomer počtu čiernych a bielych* $1 : 8$. *Aký je pomer počtu všetkých čiernych a všetkých bielych guľôčok?*

(*Michaela Petrová*)

Nápad. Najskôr určte pomer počtu veľkých čiernych a malých čiernych guľôčok.

Riešenie. Pomer počtu veľkých čiernych a veľkých bielych guľôčok je $1 : 2$. To znamená, že medzi veľkými guľôčkami tvoria 1 diel čierne a 2 diely biele guľôčky. Z toho o. i. vyplýva, že počet všetkých veľkých guľôčok je násobkom 3.

Pomer počtu malých čiernych a malých bielych guľôčok je 1 : 8. To znamená, že medzi malými guľôčkami tvoria 1 diel čierne a 8 dielov biele guľôčky; počet všetkých malých guľôčok je teda násobkom 9.

Keby boli diely, ktorými sme porovnávali farebné guľôčky medzi veľkými a malými, rovnaké, bol by pomer počtu všetkých veľkých a všetkých malých guľôčok rovný 3 : 9 = = 1 : 3. Aby bol tento pomer 5 : 3, musí byť jeden diel, ktorý sme používali pre veľké guľôčky, päťkrát väčší ako diel, ktorý sme používali pre malé guľôčky. Inými slovami, veľkých čiernych guľôčok musí byť päťkrát viac ako malých čiernych guľôčok.

V závislosti od počtu malých čiernych guľôčok (1 diel) sú všetky ostatné počty vyjadrené v nasledujúcej tabuľke:

guľôčky	veľké	malé	celkom
čierne	5 dielov	1 diel	6 dielov
biele	10 dielov	8 dielov	18 dielov
celkom	15 dielov	9 dielov	

Pomer počtu všetkých čiernych a všetkých bielych guľôčok je teda rovný

$$6 : 18 = 1 : 3.$$

Poznámka. Každý pomer môžeme podľa potreby rozšíriť. Pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b, c napr. platí

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{2a}, \quad \frac{1}{8} = \frac{b}{8b}, \quad \frac{5}{3} = \frac{5c}{3c}.$$

Čísla a, b, c predstavujú práve diely, pomocou ktorých sme porovnávali jednotlivé typy guľôčok v predchádzajúcom riešení:

guľôčky	veľké	malé	celkom
čierne	a	b	$a+b$
biele	$2a$	$8b$	$2a+8b$
celkom	$5c$	$3c$	

V tomto duchu môžeme uvedené riešenie formulovať tak, že hľadáme čísla a, b, c, aby platilo

$$3a = 5c, \quad 9b = 3c.$$

Z toho vidíme, že c musí byť nutne násobkom troch, čiže $c = 3d$ (pričom d je akékoľvek prirodzené číslo). Zvyšné dve čísla sú potom rovné

$$a = 5d, \quad b = d.$$

Po doplnení do tabuľky dostávame taký istý záver ako vyššie.

5. *Priemer známok, ktoré mali na vysvedčení žiaci 8.A z matematiky, je presne 2,45. Ak by sme nepočítali jednotku a trojku súrodencov Michala a Aleny, ktorí do triedy prišli pred mesiacom, bol by priemer presne 2,5. Určte, koľko žiakov má 8.A.*

(*Monika Dillingerová*)

Nápad. Vyjadrite informácie zo zadania pomocou počtu žiakov v triede a súčtu ich známok z matematiky.

Riešenie. Priemernú známku si môžeme predstaviť tak, že každý žiak získal práve túto známku (aj keď známka 2,45 alebo 2,5 sa samozrejme nedáva). Počet všetkých detí v 8.A označíme n. Z toho dostávame, že súčet všetkých známok je jednak $2{,}45n$, jednak $1 + 3 + 2{,}5(n - 2)$. Riešime tak rovnicu:

$$\begin{aligned} 2{,}45n &= 4 + 2{,}5n - 5, \\ 0{,}05n &= 1, \\ n &= 20. \end{aligned}$$

Trieda 8.A má 20 žiakov.

Poznámka. Ak súčet všetkých známok označíme z, tak podľa zadania platí

$$\frac{z}{n} = 2{,}45 \quad \text{a} \quad \frac{z-4}{n-2} = 2{,}5,$$

čiže

$$z = 2{,}45n \quad \text{a} \quad z = 2{,}5(n-2) + 4.$$

Porovnaním dvojakého vyjadrenia toho istého čísla z dostaneme rovnicu ako vyššie.

---

6. *Pejko dostal od svojho pána kváder zložený z navzájom rovnakých kociek cukru, ktorých bolo najmenej 1 000 a nanajvýš 2 000. Pejko kocky cukru odjedal po jednotlivých vrstvách – prvý deň odjedol jednu vrstvu spredu, druhý deň jednu vrstvu sprava a tretí deň jednu vrstvu zhora. Pritom v týchto troch vrstvách bol zakaždým rovnaký počet kociek. Zistite, koľko kociek mohol mať darovaný kváder. Určte všetky možnosti.*

(*Erika Novotná*)

Nápad. Vyjadrite počty postupne zjedených kociek v závislosti od rozmerov darovaného kvádra.

Riešenie. Rozmery kvádra (v kockách cukru) označíme x, y a z tak, aby predná stena mala rozmery $x \times z$, bočná stena $y \times z$ a horná stena $x \times y$.

- Prvý deň Pejko odjedol jednu vrstvu spredu, zjedol teda $x \cdot z$ kociek a rozmery kvádra potom boli $x \times (y-1) \times z$.
- Druhý deň odjedol jednu vrstvu sprava, zjedol teda $(y-1) \cdot z$ kociek a rozmery kvádra sa zmenšili na $(x-1) \times (y-1) \times z$.
- Tretí deň odjedol jednu vrstvu zhora, zjedol $(x-1) \cdot (y-1)$ kociek.

  Každý deň Pejko zjedol rovnaký počet kociek, platí teda

$$x \cdot z = (y-1) \cdot z = (x-1) \cdot (y-1).$$

Keďže x, y, z sú prirodzené čísla (a teda $z \neq 0$), z prvej rovnosti dostávame

$$x = y - 1.$$

Z toho vidíme, že $y - 1 \neq 0$, teda z druhej rovnosti dostávame

$$z = x - 1 = y - 2.$$

Rozmery pôvodného kvádra teda boli $(y-1) \times y \times (y-2)$ a podľa zadania má platiť

$$1\,000 \leqq (y-1) \cdot y \cdot (y-2) \leqq 2\,000.$$

Postupným skúšaním sa rýchlo presvedčíme, že jediné riešenia vyhovujúce týmto dvom nerovnostiam zodpovedajú buď hodnote $y = 12$, alebo $y = 13$. Darovaný kváder mohol mať nasledujúci počet kociek:

$$11 \cdot 12 \cdot 10 = 1\,320 \quad \text{alebo} \quad 12 \cdot 13 \cdot 11 = 1\,716.$$

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Lenka Dedková, Monika Dillingerová, Róbert Hajduk, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Tomáš Kocák, Marie Krejčová, Martin Mach, Erika Novotná, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Hucíková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014