2014/2015
64. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh MEMO*

(*Súťaž sa konala 25. – 31. 8. 2015.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Nájdite všetky surjektívne funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky kladné celé čísla a, b platí práve jedna z rovností

$$f(a) = f(b),$$
$$f(a+b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Poznámky. Symbolom $\mathbb{N}$ označujeme množinu všetkých kladných celých čísel. Funkcia $f\colon X \to Y$ sa nazýva surjektívna, ak pre každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ také, že $f(x) = y$.
(*Švajčiarsko*)

I-2. Nech $n \geqq 3$ je celé číslo. *Vnútorná uhlopriečka* jednoduchého n-uholníka je uhlopriečka, ktorá je celá vnútri tohto n-uholníka. Označme $D(\mathcal{P})$ počet všetkých vnútorných uhlopriečok jednoduchého n-uholníka $\mathcal{P}$ a $D(n)$ najmenšiu možnú hodnotu $D(\mathcal{Q})$, kde $\mathcal{Q}$ je jednoduchý n-uholník. Dokážte, že žiadne dve vnútorné uhlopriečky v $\mathcal{P}$ sa nepretínajú (okrem možných spoločných koncov) práve vtedy, keď $D(\mathcal{P}) = D(n)$.

Poznámka. Jednoduchý n-uholník je sám seba nepretínajúci mnohouholník s n vrcholmi. Mnohouholník nie je nutne konvexný. (*Slovinsko*)

I-3. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Označme E priesečník priamok rovnobežných s AC a BD prechádzajúcich bodmi B a A. Priamky EC a ED pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku AEB znova v bodoch F a G. Dokážte, že body C, D, F a G ležia na jednej kružnici. (*Slovensko, Patrik Bak*)

I-4. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (m, n), pre ktoré existujú nesúdeliteľné celé čísla a, b väčšie ako jedna také, že

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

je celé číslo. (*Chorvátsko*)

Súťaž družstiev:

T-1. Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla a, b, c také, že $abc = 1$, platí nerovnosť

$$\frac{a}{2b+c^2} + \frac{b}{2c+a^2} + \frac{c}{2a+b^2} \leqq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

(*Chorvátsko*)

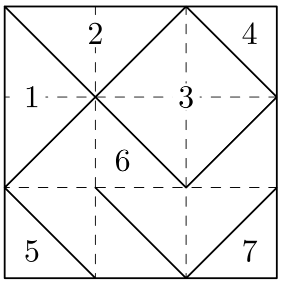
T-2. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ také, že

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y)$$

platí pre všetky nenulové reálne čísla x a y. (*Slovensko, Patrik Bak*)

T-3. V rade stojí n žiakov na pozíciách 1 až n. Kým sa učiteľ pozerá preč, niektorí žiaci zmenia svoje pozície. Keď sa učiteľ pozrie späť, žiaci stoja znova v rade. Ak žiak, ktorý stál pôvodne na pozícii i, je teraz na pozícii j, hovoríme, že sa posunul o $|i-j|$ krokov. Určte najväčší súčet krokov, o ktorý sa mohli posunúť všetci žiaci. (*Slovinsko*)

T-4. Nech N je kladné celé číslo. V každom z N^2 štvorčekov tabuľky $N\times N$ je nakreslená jedna uhlopriečka. Nakreslené uhlopriečky rozdelia tabuľku $N\times N$ na K oblastí. Pre každé N určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu K. (Na obr. 1 je príklad pre $N = 3$ a $K = 7$.) (*Chorvátsko*)



Obr. 1

T-5. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, pričom $|AB| > |AC|$. Dokážte, že existuje bod D s nasledujúcou vlastnosťou: Ak X a Y sú také dva rôzne body vnútri trojuholníka ABC, že body B, C, X a Y ležia na jednej kružnici a platí

$$|\measuredangle AXB| - |\measuredangle ACB| = |\measuredangle CYA| - |\measuredangle CBA|,$$

tak priamka XY prechádza bodom D. (*Slovensko, Patrik Bak*)

T-6. Nech I je stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC, pričom $|AB| > |AC|$. Označme D priesečník priamky AI so stranou BC. Predpokladajme, že bod P leží na úsečke BC a platí $|PI| = |PD|$. Označme J obraz bodu I v osovej súmernosti podľa osi strany BC. Nech Q je druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom ABC a APD. Dokážte, že $|\measuredangle BAQ| = |\measuredangle CAJ|$. (*Slovensko, Patrik Bak*)

T-7. Nájdite všetky usporiadané dvojice kladných celých čísel (a, b) takých, že platí

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

(*Švajčiarsko*)

T-8. Nech $n \geqq 2$ je celé číslo. Určte počet kladných celých čísel m takých, že $m \leqq n$ a $m^2 + 1$ je deliteľné číslom n. (*Chorvátsko*)