2002/2003
52. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 25. novembra 2002.*)

1. Postupnosť celých čísel $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $x_1 = 1$ spĺňa podmienku

$$x_n = \pm x_{n-1} \pm \cdots \pm x_1$$

s vhodnou voľbou znamienok „+“ a „−“ pre ľubovoľné $n > 1$, napríklad $x_2 = -x_1$, $x_3 = -x_2 + x_1$, $x_4 = x_3 - x_2 - x_1$, ... Pre dané n určte všetky možné hodnoty x_n. (*J. Földes*)

2. Na priamke p sú dané rôzne body A, B, C v tomto poradí, kde $|AB| = 1$ a $|BC| = h$. Uvažujme kružnice k_A, k_B, k_C, ktoré sa dotýkajú priamky p postupne v bodoch A, B, C. Kružnice k_A, k_B majú pritom vonkajší dotyk v bode P a kružnice k_B, k_C majú vonkajší dotyk v bode Q. Určte všetky také hodnoty polomeru kružnice k_B, pre ktoré je trojuholník BPQ rovnoramenný. (*J. Zhouf*)

3. Určte všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2},$$

kde a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka. (*P. Kaňovský*)

4. Určte všetky prirodzené čísla $n > 1$ také, že v niektorej číselnej sústave so základom $z \geqq 5$ platí nasledovné kritérium deliteľnosti: Trojmiestne číslo $(abc)_z$ je deliteľné číslom n práve vtedy, keď je číslom n deliteľné číslo $c + 3b - 4a$. (*P. Černek*)

5. V rovine sú dané tri rôzne body K, L, M, ktoré v tomto poradí ležia na priamke. V tejto rovine nájdite množinu všetkých vrcholov C štvorcov $ABCD$ takých, že bod K leží na strane AB, bod L na uhlopriečke BD a bod M na strane CD. (*J. Šimša*)

6. Hráči A a B hrajú na doske zloženej zo šiestich polí očíslovaných $1, 2, \ldots, 6$ nasledujúcu hru. Na začiatku je umiestnená na pole s číslom 2 figúrka a potom sa hádže bežnou hracou kockou. Ak padne číslo deliteľné tromi, posunie sa figúrka na pole s číslom o jedna menším, inak na pole s číslom o jedna väčším. Hra končí víťazstvom hráča A (resp. B), ak sa dostane figúrka na pole s číslom 1 (resp. 6). S akou pravdepodobnosťou zvíťazí hráč A? (*P. Černek*)