2002/2003
52. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 20. januára 2003.*)

1. *Palindrómom* rozumieme prirodzené číslo, ktoré sa číta rovnako odpredu aj odzadu, napr. 16 261. Nájdite najväčší štvormiestny palindróm, ktorého druhá mocnina je tiež palindrómom. (*E. Kováč*)

2. Nájdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z) vyhovujúcich sústave rovníc

$$x^3 + y^3 = 9z^3,$$
$$x^2y + y^2x = 6z^3.$$

(*J. Zhouf*)

3. Je daný trojuholník so stranami dĺžok a, b, c a obsahom S. Dokážte, že rovnosť $2c^2 = |a^2 - b^2|$ platí práve vtedy, keď existuje trojuholník so stranami dĺžok a, b, $2c$ a obsahom $2S$. (*P. Černek*)

4. *Krokom* budeme rozumieť nahradenie usporiadanej trojice celých čísel (p, q, r) trojicou $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Rozhodnite, či existuje celé číslo k také, že z trojice $(1, 3, 7)$ vznikne po konečnom počte krokov trojica $(k, k + 1, k + 2)$. (*P. Černek*)

5. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Kružnica k_1 zostrojená nad stranou AD ako priemerom a kružnica k_2, ktorá prechádza vrcholmi B, C a dotýka sa priamky AB, majú vonkajší dotyk v bode P. Dokážte, že uhly CPD a ABC sú zhodné. (*J. Švrček*)

6. V karteziánskej sústave súradníc Ouv znázornite množinu všetkých bodov $[u, v]$, kde $u > 0$, pre ktoré má rovnica

$$|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$$

s neznámou x práve tri rôzne reálne riešenia. (*J. Šimša*)