65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5*

---

1. *Čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 cestovali vlakom. Vlak mal tri vagóny a v každom sa viezli práve tri čísla. Číslo 1 sa viezlo v prvom vagóne a v poslednom vagóne boli všetky čísla nepárne. Sprievodca cestou spočítal súčet čísel v prvom, druhom aj poslednom vagóne a zakaždým mu vyšiel rovnaký súčet. Určte, ako mohli byť čísla do vagónov rozdelené.* (Veronika Hucíková)

Nápad. Zistite, aký bol súčet čísel v každom vagóne.

Riešenie. Súčet všetkých čísel vo všetkých vagónoch je

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Súčet čísel v každom vagóne teda bol $45:3=15$.

V treťom vagóne sa viezli tri nepárne čísla iné ako 1, z nich možno získať súčet 15 len ako $3+5+7$. V prvom vagóne sa vedľa 1 viezli ešte niektoré dve čísla z 2, 4, 6, 8, 9. Z týchto čísel možno získať súčet 15 len ako $1+6+8$. Do druhého vagóna tak zostávajú čísla 2, 4, 9 (pre kontrolu $2+4+9=15$).

Úloha má jediné riešenie: v prvom vagóne sa viezli čísla 1, 6, 8, v druhom vagóne 2, 4, 9, v treťom vagóne 3, 5, 7.

Iné riešenie. Aj bez určenia súčtu čísel v každom vagóne sa dá uvedené riešenie objaviť skúšaním. Najmenej možností je v poslednom vagóne, kde sa viezli niektoré tri čísla z 3, 5, 7, 9:

- Trojica 5, 7, 9 má súčet 21 a rovnaký súčet by musel byť aj v prvom vagóne. Z dvoch zvyšných čísel a 1 však možno získať najviac $1+6+8=15$, čo nevyhovuje.
- Trojica 3, 7, 9 má súčet 19; v prvom vagóne by potom mohol byť súčet najviac $1+6+8=15$, čo tiež nevyhovuje.
- Trojica 3, 5, 9 má súčet 17; v prvom vagóne by potom mohol byť súčet najviac $1+7+8=16$, čo tiež nevyhovuje.
- Trojica 3, 5, 7 má súčet 15; v prvom vagóne by potom mohla byť trojica 1, 6, 8 so súčtom 15, čo je vyhovujúca možnosť.

Do druhého vagóna tak zostávajú čísla 2, 4, 9, ktoré majú tiež súčet 15.

---

2. *Marta niesla svojej chorej kamarátke Majke 7 jabĺk, 6 hrušiek a 3 pomaranče. Cestou ale dva kusy ovocia zjedla. Určte, ktoré z nasledujúcich situácií mohli nastať a aké dva kusy ovocia by Marta v takom prípade musela zjesť:*

a) *Majka nedostala žiadny pomaranč.*
b) *Majka dostala menej hrušiek ako pomarančov.*
c) *Majka dostala rovnaký počet jabĺk, hrušiek aj pomarančov.*
d) *Majka dostala rovnaký počet kusov ovocia dvojakého druhu.*
e) *Majka dostala viac jabĺk ako ostatných kusov ovocia dokopy.*

(Libuše Hozová)

Nápad. Zvážte postupne všetky možnosti, ktoré kusy ovocia mohla Marta zjesť.

Riešenie. Existuje iba niekoľko málo možností, ktoré kusy ovocia mohla Marta cestou zjesť. Preberieme všetky možnosti a porovnáme s ponúkanými situáciami a) – e). Jednotlivé druhy ovocia označujeme ich začiatočnými písmenami:

Marta zjedla	Majka dostala
$2j$	$5j + 6h + 3p$
$j + h$	$6j + 5h + 3p$
$j + p$	$6j + 6h + 2p$
$2h$	$7j + 4h + 3p$
$h + p$	$7j + 5h + 2p$
$2p$	$7j + 6h + p$

Z toho vidíme, že situácie a), b), c), e) nemohli nastať nikdy a situácia d) iba v treťom prípade: Marta by vtedy cestou zjedla jablko a pomaranč, Majke by doniesla 6 jabĺk, 6 hrušiek a 2 pomaranče.

---

3. *Mamička vyprala štvorcové utierky a vešia ich vedľa seba na bielizňovú šnúru natiahnutú medzi dvoma stromami. Použila šnúru s dĺžkou 7,5 metra, pričom na uviazanie okolo kmeňov potrebovala na každej strane 8 dm. Všetky utierky majú šírku 45 cm. Medzi krajnou utierkou a kmeňom mamička necháva medzeru aspoň 10 cm, utierky sa jej neprekrývajú a nemá ich zložené ani skrčené. Koľko najviac utierok môže takto zavesiť na natiahnutú šnúru?* (*Lenka Dedková*)

Nápad. Najskôr zistite, koľko šnúry môže byť využitej na samotné vešanie utierok.

Riešenie. Všetky rozmery budeme vyjadrovať v rovnakých jednotkách, a to v dm. Dĺžka napnutej šnúry medzi stromami je rovná $75 - 2 \cdot 8 = 59$ (dm). Z každej strany má navyše zostať voľný 1 dm. Na samotné vešanie teda môže byť použitých $59 - 2 \cdot 1 = 57$ (dm).

Každá utierka je široká 4,5 dm, jedna dvojica utierok teda zaberá aspoň 9 dm. Šesť dvojíc utierok zaberá aspoň 54 dm, v takom prípade zvýšia nanajvýš 3 dm šnúry ($57 = 6 \cdot 9 + 3$). Do tohto priestoru sa už žiadna ďalšia utierka nevôjde. Na šnúru možno uvedeným spôsobom zavesiť najviac 12 utierok.

---

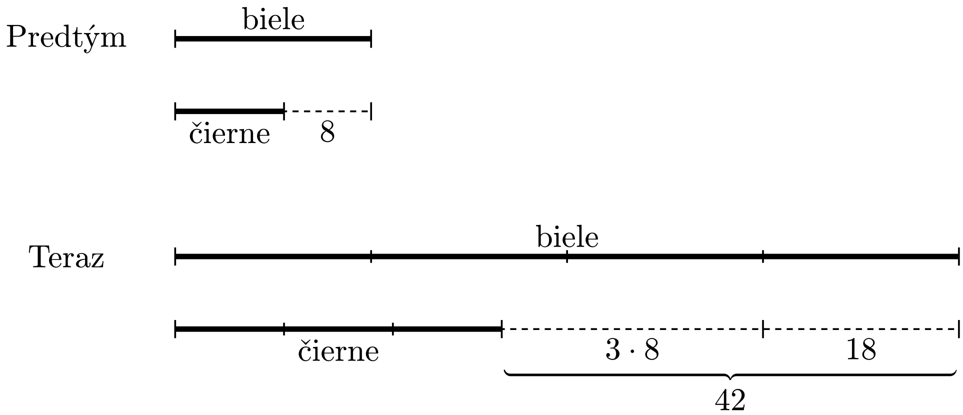
4. *Keď pán Baran zakladal chov, mal bielych oviec o 8 viac ako čiernych. V súčasnosti má bielych oviec štyrikrát viac ako na začiatku a čiernych trikrát viac ako na začiatku. Bielych oviec je teraz o 42 viac ako čiernych. Koľko teraz pán Baran chová bielych a čiernych oviec dokopy?* (*Libor Šimůnek*)

Nápad. Uvažujte situáciu, keď sa trikrát zväčší ako počet čiernych, tak počet bielych oviec.

Riešenie. Keby sa počiatočné počty čiernych aj bielych oviec zväčšili trikrát, bolo by teraz bielych oviec o 24 viac ako čiernych (lebo $3 \cdot 8 = 24$). Počet bielych oviec sa však zväčšil nie trikrát, ale štyrikrát a bielych oviec je teraz o 42 viac ako čiernych. Rozdiel $42 - 24 = 18$ zodpovedá rozdielu štvornásobku a trojnásobku pôvodného počtu bielych oviec, čo je práve onen pôvodný počet. Na začiatku teda bolo 18 bielych a $18 - 8 = 10$ čiernych oviec.

V súčasnosti pán Baran chová $4 \cdot 18 = 72$ bielych oviec a $3 \cdot 10 = 30$ čiernych oviec, čo je spolu $72 + 30 = 102$ oviec.

Poznámka. Predošlé úvahy je možné graficky znázorniť takto:

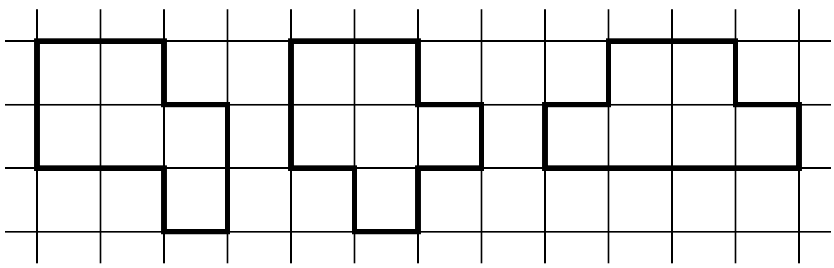


---

5. *Štvorcová sieť sa skladá zo štvorcov so stranou dĺžky* 1 cm. *Narysujte do nej aspoň tri rôzne útvary také, aby každý mal obsah* $6\,\mathrm{cm}^2$ *a obvod* 12 cm *a aby ich strany splývali s priamkami siete.* (*Eva Semerádová*)

Nápad. Načrtnite si nejaký útvar s obsahom $6\,\mathrm{cm}^2$ a upravujte ho tak, aby boli splnené ostatné podmienky.

Riešenie. Jednoduchým útvarom s obsahom $6\,\mathrm{cm}^2$ je napr. obdĺžnik so stranami dĺžok 2 cm a 3 cm. Ten má však obvod iba 10 cm; potrebujeme presunúť časť jeho plochy tak, aby sa obvod o 2 cm zväčšil. To si možno v rámci zadanej štvorcovej siete predstaviť tak, že skúšame presúvať jednotlivé štvorce obsiahnuté v obdĺžniku na iné miesta. Niekoľko možných riešení je na obrázku:



Poznámka. Dôsledný riešiteľ sa môže zamyslieť nad ďalšími, príp. všetkými možnými riešeniami. Na to si stačí povšimnúť, že pri presúvaní štvorcov mysleného obdĺžnika sa obvod zväčší buď o 2 cm, alebo o 4 cm, a to podľa toho, či je tento štvorec rohový, alebo nie.

6. *V nepriestupnom roku bolo 53 nedieľ. Na aký deň týždňa pripadol Štedrý deň?*
(*Marta Volfová*)

Nápad. Zistite, koľko je v roku plných týždňov a koľko je dní navyše.

Riešenie. Nepriestupný rok má 365 dní, t. j. 52 plných týždňov a jeden deň navyše ($365 = 52 \cdot 7 + 1$). V 52 plných týždňoch je 52 nedieľ, preto musí byť onen deň navyše nedeľa. Taký rok preto začínal aj končil nedeľou. Štedrý deň je presne týždeň pred posledným dňom v roku, preto bol aj Štedrý deň v nedeľu.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Róbert Hajduk, Erika Novotná, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015