2002/2003
52. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 14. januára 2003.*)

1. Nájdite základy z všetkých číselných sústav, v ktorých je štvormiestne číslo $(1001)_z$ deliteľné dvojmiestnym číslom $(41)_z$. (*P. Černek*)

2. Vnútri strany AB daného ostrouhlého trojuholníka ABC nájdite bod S tak, aby trojuholník SXY, kde X a Y sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom ASC a BSC, mal najmenší možný obsah. (*P. Černek*)

3. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}\log_x(y+z) &= p,\\ \log_y(z+x) &= p,\\ \log_z(x+y) &= p\end{aligned}$$

s neznámymi x, y, z a nezáporným celočíselným parametrom p. (*J. Švrček*)

4. Postupnosť $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s prvým členom $x_1 = 1$ spĺňa pre každé $n > 1$ podmienku

$$x_n = x_{n-1}^{\pm 1} + x_{n-2}^{\pm 1} + \ldots + x_1^{\pm 1}$$

s vhodnou voľbou znamienok „+“ a „−“ v exponentoch mocnín.

a) Rozhodnite, či niektorý člen takej postupnosti musí byť väčší ako 1 000.

b) Zistite najmenšiu možnú hodnotu člena $x_{1\,000\,000}$.

c) Dokážte, že nerovnosť $x_n < 4$ nemôže platiť pre deväť členov x_n takej postupnosti. (*J. Földes*)