65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

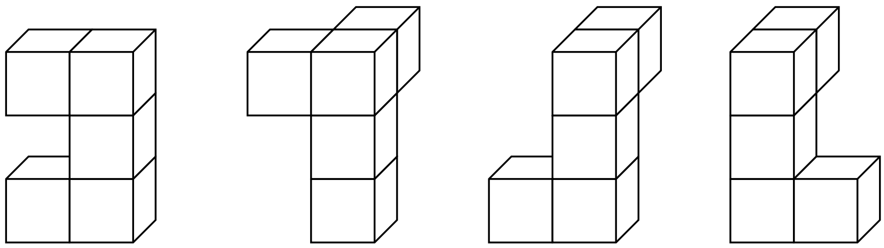
---

1. *Myška Hryzka našla 27 rovnakých kocôčok syra. Najskôr si z nich poskladala veľkú kocku a chvíľu počkala, kým sa syrové kocôčky k sebe prilepili. Potom z každej steny veľkej kocky vyhrýzla strednú kocôčku. Napokon zjedla aj kocôčku, ktorá bola v strede veľkej kocky. Zvyšok syra chce Hryzka spravodlivo rozdeliť svojim štyrom mláďatám, a preto ho chce rozrezať na štyri kusy rovnakého tvaru aj veľkosti. Rezať bude iba pozdĺž stien kocôčok a nič k sebe už lepiť nebude. Aký tvar môžu mať kusy syra pre mláďatá? Nájdite aspoň dve možnosti.* (Veronika Hucíková)

Nápad. Určte, koľko syra dostane každé z mláďat.

Riešenie. Pôvodná kocka bola zložená z 27 kocôčok. Hryzka vyhrýzla po jednej kocôčke z každej steny a jednu prostrednú, prehryzená kocka teda obsahovala $27 - 6 - 1 = 20$ kocôčok. Každé zo štyroch mláďat teda dostane $20 : 4 = 5$ kocôčok syra.

Teraz je potrebné predstavovať si rôzne útvary zložené z 5 kocôčok tak, aby zo štyroch takých útvarov bolo možné zložiť prehryzenú kocku. Tu sú všetky riešenia:



---

2. *Vlčkovci majú 4 deti. Ondrej je o 3 roky starší ako Matej a Jakub o 5 rokov starší ako najmladšia Jana. Vieme, že majú dokopy 30 rokov a pred 3 rokmi mali dokopy 19 rokov. Určte, koľko má ktoré dieťa rokov.* (Marta Volfová)

Nápad. Zamerajte sa na súčet vekov súrodencov pred tromi rokmi.

Riešenie. Označme aktuálny vek detí v rokoch začiatočnými písmenami ich mien (Jakubov vek označíme k) a takto postupne vyjadríme všetky vzťahy zo zadania:

$$o = m + 3, \quad k = j + 5, \quad o + m + k + j = 30,$$

odkiaľ po dosadení dostávame

$$\begin{aligned}(m+3) + m + (j+5) + j = 2m + 2j + 8 &= 30,\\ 2m + 2j &= 22,\\ m + j &= 11.\end{aligned}$$

Zároveň má platiť, že pred tromi rokmi mali deti dokopy 19 rokov. Avšak rozdiel $30 - 19 = 11$ nie je násobkom 3, takže tušíme nejaký problém. Vzhľadom na to, že $11 = 3 \cdot 3 + 2$, znamená to, že najmladšia Jana nebola pred tromi rokmi ešte na svete a teraz má 2 roky. Z predchádzajúcich vzťahov postupne odvodzujeme

$$m = 11 - j = 9, \quad k = j + 5 = 7, \quad o = m + 3 = 12.$$

Vek detí Vlčkovcov je teda nasledujúci: Ondrej má 12 rokov, Matej 9, Jakub 7 a Jana 2 roky.

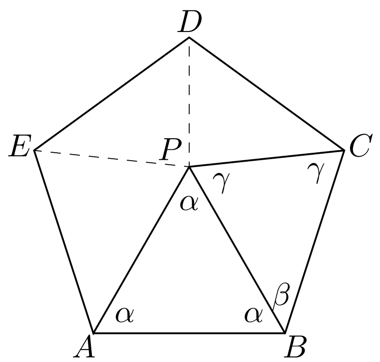
Poznámka. Ak rovno neodhalíme, že $j = 2$, môžeme akúkoľvek inú možnosť vylúčiť podobným dosadením ako vyššie a porovnaním s požadovaným súčtom pred tromi rokmi. Vzhľadom na to, že $m + j = 11$ a že Jana je najmladšia, stačí vyskúšať nasledujúce možnosti: $j = 1, 2, 3, 4$ a 5.

---

3. *Vnútri pravidelného päťuholníka $ABCDE$ je bod P taký, že trojuholník ABP je rovnostranný. Aký veľký je uhol BCP?* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Uvedomte si, že trojuholník BCP nie je všeobecný.

Riešenie. Päťuholník $ABCDE$ je pravidelný, takže platí $|AB| = |BC|$. Trojuholník ABP je rovnostranný, preto $|AB| = |BP|$. Odtiaľ vidíme, že $|BP| = |BC|$, teda že trojuholník BCP je rovnoramenný. Jeho vnútorné uhly pri vrcholoch P a C sú preto zhodné; na ich určenie stačí poznať uhol pri vrchole B (súčet veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom trojuholníku je 180°). Pritom uhol PBC je rozdielom uhlov ABC a ABP, z ktorých prvý je vnútorným uhlom pravidelného päťuholníka (vyjadríme ho za chvíľu) a druhý je vnútorným uhlom rovnostranného trojuholníka (má veľkosť $\alpha = 60°$).



Päťuholník $ABCDE$ môžeme rozdeliť na päť trojuholníkov so spoločným vrcholom P. Súčet vnútorných uhlov päťuholníka je rovný súčtu vnútorných uhlov všetkých piatich trojuholníkov bez uhlov pri vrchole P, t. j. $5 \cdot 180° - 360° = 540°$. V pravidelnom päťuholníku sú všetky vnútorné uhly zhodné, každý má teda veľkosť $540° : 5 = 108°$.

Odtiaľ konečne vieme vyjadriť

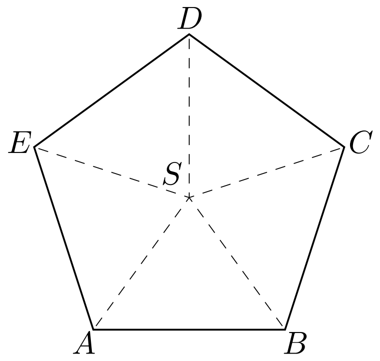
$$\beta = |\measuredangle PBC| = |\measuredangle ABC| - |\measuredangle ABP| = 108° - 60° = 48°$$

a následne

$$\gamma = |\measuredangle BCP| = |\measuredangle BPC| = \frac{180° - 48°}{2} = \frac{132°}{2} = 66°.$$

Veľkosť uhla BCP je 66°.

Poznámka. Veľkosť vnútorného uhla pravidelného päťuholníka je možné odvodiť aj pomocou rozdelenia na päť zhodných rovnoramenných trojuholníkov ako na nasledujúcom obrázku (S je stred päťuholníka, t. j. stred jeho opísanej kružnice).



Uhol pri vrchole S v každom z týchto trojuholníkov má veľkosť $360 : 5 = 72°$; súčet uhlov pri základni je rovný $180° - 72° = 108°$, čo je tiež veľkosť vnútorného uhla pravidelného päťuholníka.

---

4. *V škole pre robotov do jednej triedy chodí dvadsať robotov Robertov, ktorí sú očíslovaní Robert 1 až Robert 20. V triede je práve napätá atmosféra, rozprávajú sa spolu iba niektorí roboti. Roboti s nepárnym číslom sa nerozprávajú s robotmi s párnym číslom. Medzi Robertmi s nepárnym číslom sa spolu rozprávajú iba roboti, ktorí majú číslo s rovnakým počtom cifier. Roberti s párnym číslom sa rozprávajú iba s tými, ktorých číslo začína rovnakou cifrou. Koľko dvojíc robotov Robertov sa môže spolu navzájom rozprávať?* (*Karel Pazourek*)

Nápad. Najskôr rozdeľte robotov do skupín, v rámci ktorých sa môžu navzájom rozprávať.

Riešenie. Najskôr vyjadríme všetky skupiny robotov, ktorí sa môžu medzi sebou rozprávať (v nasledujúcich zoznamoch sú tieto skupiny vyznačené zátvorkami). Roboti s nepárnymi číslami sú rozdelení podľa počtu cifier, to sú dve skupiny:

$$(1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9),\ (11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19).$$

Roboti s párnymi číslami sú rozdelení podľa začiatočnej cifry:

$$(2,\ 20),\ (4),\ (6),\ (8),\ (10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18).$$

Stačí teda spočítať počty dvojíc, ktoré možno v rámci každej skupiny vytvoriť. Máme tri skupiny s jediným robotom – v nich nevytvoríme žiadnu dvojicu; jednu skupinu s dvoma robotmi – v tej máme jedinú dvojicu; tri skupiny po piatich robotoch – v každej takej skupine možno vytvoriť 10 dvojíc. Celkom dostávame $1 + 3 \cdot 10 = 31$ dvojíc robotov, ktorí sa spolu môžu rozprávať.

---

5. *V kocúrkovskej škole používajú zvláštnu číselnú os. Vzdialenosť medzi číslami 1 a 2 je 1 cm, vzdialenosť medzi číslami 2 a 3 je 3 cm, medzi číslami 3 a 4 je 5 cm a tak ďalej: vzdialenosť medzi každou nasledujúcou dvojicou prirodzených čísel sa vždy zväčší o 2 cm. Medzi ktorými dvoma prirodzenými číslami je na kocúrkovskej číselnej osi vzdialenosť 39 cm? Nájdite všetky možnosti.* (*Karel Pazourek*)

Nápad. Vypíšte si vzdialenosti medzi rôznymi dvojicami čísel na kocúrkovskej osi.

Riešenie. Vzdialenosť 39 cm môže byť realizovaná medzi rôznymi dvojicami čísel. Budeme systematicky vypisovať vzdialenosti medzi niekoľkými prvými číslami kocúrkovskej osi. V nasledujúcej schéme je nad čiarou vypísaných prvých 10 čísel a pod čiarou skutočné vzdialenosti (v cm) medzi rôznymi dvojicami týchto čísel – v prvom riadku pod čiarou sú postupne vzdialenosti medzi susednými číslami, v druhom riadku pod čiarou sú vzdialenosti medzi dvojicami čísel, ktoré majú medzi sebou práve jedno číslo, atď. (Napr. 21 v treťom riadku pod čiarou označuje skutočnú vzdialenosť medzi číslami 3 a 6 na kocúrkovskej osi a je určené ako $5+7+9$). Hviezdičkou sú označené príliš veľké čísla, ktoré nás nezaujímajú.

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10
	1		3		5		7		9		11		13		15		17	
		4		8		12		16		20		24		28		32		36
			9		15		21		27		33		**39**		∗		∗	
				16		24		32		40		∗		∗		∗		∗
					25		35		45		∗		∗		∗		∗	
						36		48		∗		∗		∗		∗		∗
							49		∗		∗		∗		∗		∗	

Ihneď vidíme (z tretieho riadku pod čiarou), že vzdialenosť 39 cm je medzi číslami 6 a 9 a že sa určite neobjavuje medzi číslami, ktoré majú medzi sebou viac ako dve čísla (t. j. od štvrtého riadku pod čiarou). Vzdialenosť 39 cm sa určite tiež nemôže objavovať medzi číslami, ktoré majú medzi sebou práve jedno číslo, pretože všetky tieto vzdialenosti sú párne (druhý riadok pod čiarou). Ostáva teda preskúmať vzdialenosti medzi susednými číslami (prvý riadok pod čiarou):

Postupnosť vzdialeností medzi susednými číslami môžeme vyjadriť ako

$$1, \quad 3 = 1 + 2, \quad 5 = 1 + 2 \cdot 2, \quad 7 = 1 + 2 \cdot 3, \quad 9 = 1 + 2 \cdot 4, \quad \ldots$$

Všeobecne, vzdialenosť medzi číslami i a $i+1$ na kocúrkovskej osi je rovná

$$1 + 2(i-1) = 2i - 1 \,(\mathrm{cm}).$$

Táto vzdialenosť teda bude rovná 39 cm práve vtedy, keď $i = 20$.

Vzdialenosť 39 cm na kocúrkovskej číselnej osi je medzi dvojicami čísel 6, 9 a 20, 21.

Poznámky. Záverečnú úvahu možno nahradiť vypísaním a spočítaním všetkých nepárnych čísel až po 39. Ak je výpis úplný, je také riešenie správne.

Naopak, úvodné vypisovanie sa dá celé nahradiť úvahou, príp. výpočtom: Všetky vzdialenosti v tabuľke sú súčtom rôznych počtov nepárnych čísel, pričom tieto počty sú buď nepárne (pre susediace čísla a dvojice čísel, medzi ktorými je párny počet čísel), alebo párne (pre dvojice čísel, medzi ktorými je nepárny počet čísel). V jednotlivých riadkoch sa teda objavujú buď iba nepárne, alebo iba párne čísla. Vzdialenosť 39 cm sa teda môže objavovať iba medzi susednými číslami a dvojicami, medzi ktorými je na kocúrkovskej osi párny počet čísel.

Predošlé vypisovanie postupnosti vzdialeností medzi susednými číslami má nasledujúcu analógiu pre dvojice čísel, medzi ktorými sú dve čísla:

$$9, \quad 15 = 9 + 6, \quad 21 = 9 + 6 \cdot 2, \quad 27 = 9 + 6 \cdot 3, \quad \dots$$

Všeobecne, vzdialenosť medzi číslami i a $i + 3$ na kocúrkovskej osi je rovná

$$9 + 6(i - 1) = 6i + 3\,(\mathrm{cm}).$$

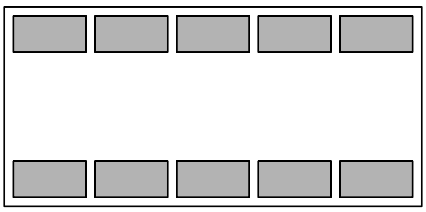
Táto vzdialenosť teda bude rovná 39 cm práve vtedy, keď $i = 6$. Podobne možno vyjadriť akúkoľvek inú vyššie vypisovanú postupnosť.

Riešenie úlohy možno zjednodušiť pomocou nasledujúceho poznatku: Súčet nepárneho počtu po sebe idúcich nepárnych čísel je rovný súčinu počtu týchto čísel a prostredného z nich. Usilovným riešiteľom odporúčame tento poznatok zdôvodniť a riešenie domyslieť.

V uvedenej schéme si môžeme všimnúť, že všetky čísla v prvom šikmom stĺpci sú druhými mocninami prirodzených čísel. To nie je náhoda – všeobecne platí, že súčet prvých k po sebe idúcich nepárnych čísel je rovný k^2. Odporúčame porovnať toto tvrdenie s poznatkom v predchádzajúcej poznámke.

---

6. *Na výstave dlhosrstých mačiek sa zišlo spolu desať vystavujúcich. Vystavovalo sa v obdĺžnikovej miestnosti, v ktorej boli dva rady stolov ako na obrázku. Mačky boli*



označené navzájom rôznymi číslami v rozsahu 1 až 10 a na každom stole sedela jedna mačka. Určte číslo mačky, ktorá bola na výstave hodnotená najlepšie, ak viete, že:

- *súčet čísel mačiek sediacich oproti sebe bol vždy rovnaký,*
- *súčet čísel každých dvoch mačiek sediacich vedľa seba bol párny,*
- *súčin čísel každých dvoch mačiek sediacich vedľa seba v dolnom rade bol násobok čísla 8,*
- *mačka číslo 1 nebola na kraji a bola viac vpravo ako mačka číslo 6,*
- *vyhrala mačka sediaca v pravom dolnom rohu.*

(*Martin Mach*)

Nápad. Môžu oproti sebe, príp. vedľa seba sedieť mačka s párnym a mačka s nepárnym číslom?

Riešenie. Postupne rozoberieme dôsledky jednotlivých poznatkov zo zadania:

a) Čísla mačiek sediacich oproti sebe tvoria 5 párov s rovnakým súčtom. Súčet čísel všetkých mačiek je $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, takže každý pár musí mať súčet $55 : 5 = 11$; jediné možnosti sú $1 + 10$, $2 + 9$, $3 + 8$, $4 + 7$, $5 + 6$.

b) Párne číslo sa nedá získať súčtom párneho a nepárneho čísla. V jednom rade preto môžu sedieť iba mačky s nepárnymi číslami, v druhom iba mačky s párnymi číslami.
c) Násobok čísla 8 nemožno získať súčinom nepárnych čísel. Z toho a z predchádzajúceho dôsledku vyplýva, že v dolnom rade sedeli iba mačky s párnymi číslami, t. j. 2, 4, 6, 8, 10. Súčinom dvoch takých čísel možno získať násobok 8 práve vtedy, keď jeden z činiteľov je 4 alebo 8. Preto nemôžu byť mačky s číslami 4 a 8 na krajoch, ani uprostred.
d) Podľa dôsledku a) vieme, že oproti mačke s číslom 1 sedela mačka s číslom 10. Z toho vyplýva, že ani mačka s číslom 10 nemôže byť na kraji a je viac vpravo ako mačka s číslom 6.
e) Z doterajších informácií vieme, že v pravom dolnom rohu sedela mačka s párnym číslom rôznym od 4, 8, 10 a 6.

Vyhrala teda mačka s číslom 2.

Poznámka. Z uvedeného takmer vieme určiť rozmiestnenie všetkých mačiek v miestnosti: poradie mačiek v spodnom rade mohlo byť

$$\text{buď} \quad 6,\ 4,\ 10,\ 8,\ 2, \quad \text{alebo} \quad 6,\ 8,\ 10,\ 4,\ 2,$$

poradie mačiek v hornom rade je potom jednoznačne určené podľa dôsledku a).

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Róbert Hajduk, Erika Novotná, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015