SKMO

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA

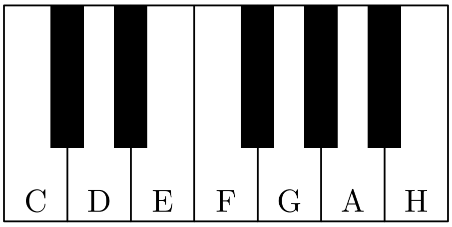
skmo.sk

65. ročník Matematickej olympiády
2015/2016

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8

---

1. *Mišo mal na poličke malú klaviatúru, ktorú vidíte na obrázku. Na bielych klávesoch boli vyznačené ich tóny. Klaviatúru našla malá Klára. Keď ju brala z poličky, vypadla*



jej z ruky a všetky biele klávesy sa z nej vysypali. Aby sa brat nehneval, začala ich Klára skladať späť. Všimla si pritom, že sa dali vložiť iba na niektoré miesta, lebo im prekážali čierne klávesy umiestnené presne doprostred medzi dva biele. Kláre sa podarilo klávesy nejako zložiť, avšak tóny na nich boli pomiešané, keďže ešte nepoznala hudobnú stupnicu. Zistite, koľkými spôsobmi mohla Klára klávesy poskladať. (Erika Novotná)

Nápad. Ktoré klávesy mohla Klára zameniť a ktoré nie?

Riešenie. Rozsypané, tzn. biele klávesy sú trojakého typu:

1. klávesy C a F, ktoré majú čiernu klávesu sprava,
2. klávesy E a H, ktoré majú čiernu klávesu zľava,
3. klávesy D, G a A, ktoré majú čierne klávesy z oboch strán.

Je zrejmé, že Klára mohla popliesť vždy len klávesy rovnakého typu. Klávesy prvého typu mohla poskladať dvojakým spôsobom:

$$\mathrm{C} \ast \ast \mathrm{F} \ast \ast \ast, \quad \mathrm{F} \ast \ast \mathrm{C} \ast \ast \ast.$$

Klávesy druhého typu mohla poskladať tiež dvojakým spôsobom:

$$\ast \ast \mathrm{E} \ast \ast \ast \mathrm{H}, \quad \ast \ast \mathrm{H} \ast \ast \ast \mathrm{E}.$$

Klávesy tretieho typu mohla poskladať šiestimi spôsobmi:

$$\begin{array}{ll} \ast \mathrm{D} \ast \ast \mathrm{G}\,\mathrm{A} \ast, & \ast \mathrm{D} \ast \ast \mathrm{A}\,\mathrm{G} \ast, \\ \ast \mathrm{G} \ast \ast \mathrm{A}\,\mathrm{D} \ast, & \ast \mathrm{G} \ast \ast \mathrm{D}\,\mathrm{A} \ast, \\ \ast \mathrm{A} \ast \ast \mathrm{D}\,\mathrm{G} \ast, & \ast \mathrm{A} \ast \ast \mathrm{G}\,\mathrm{D} \ast. \end{array}$$

Uvedené tri skupiny možných skladaní sú od seba úplne nezávislé (možno ich ľubovoľne kombinovať). Preto je celkový počet možností, ako mohla Klára klávesy poskladať, rovný $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$.

2. *Na lúke sa pasú kone, kravy a ovce, spolu ich je menej ako 200. Keby bolo kráv 45-krát viac, koní 60-krát viac a oviec 35-krát viac ako ich je teraz, ich počty by sa rovnali. Koľko sa spolu na lúke pasie koní, kráv a oviec?* (Marie Krejčová)

Nápad. Aké sú pomery počtov jednotlivých druhov zvierat?

Riešenie. Pomer medzi počtom kráv a koní je

$$60 : 45 = 4 : 3$$

a pomer medzi počtom oviec a koní je

$$60 : 35 = 12 : 7.$$

Počet koní teda musí byť nejakým násobkom čísla 3 a súčasne čísla 7, teda násobkom čísla 21.

Keby na lúke bolo 21 koní, potom by tam bolo $21 \cdot 4 : 3 = 28$ kráv a $21 \cdot 12 : 7 = 36$ oviec, celkom teda $21 + 28 + 36 = 85$ zvierat. Keby na lúke bolo 42 koní, potom by všetky počty boli dvojnásobné, celkom by teda bolo $2 \cdot 85 = 170$ zvierat. Keby na lúke bolo 63 koní, potom by všetky počty boli trojnásobné, celkom by teda bolo $3 \cdot 85 = 255$ zvierat, čo je však viac ako 200.

Na lúke sa teda páslo buď 85, alebo 170 zvierat.

Poznámka. K rovnakému výsledku možno dôjsť tiež rozkladom daných násobkov na súčiny prvočísel:

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5, \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

Aby sa zodpovedajúce násobky počtov jednotlivých zvierat rovnali, musia byť v ich prvočíselných rozkladoch zastúpené všetky predchádzajúce prvočísla (vrátane ich násobností). Najmenší možný počet kráv teda je $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$, koní $3 \cdot 7 = 21$ a oviec $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$, celkom $28 + 21 + 36 = 85$ zvierat.

---

3. *Daný je rovnoramenný lichobežník $ABCD$, v ktorom platí*

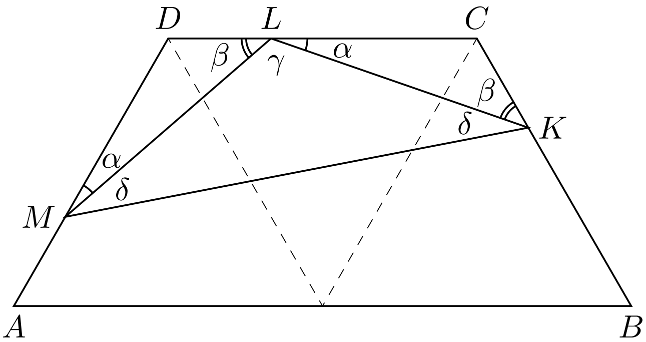
$$|AB| = 2|BC| = 2|CD| = 2|DA|.$$

Na jeho strane BC je bod K taký, že $|BK| = 2|KC|$, na jeho strane CD je bod L taký, že $|CL| = 2|LD|$, a na jeho strane DA je bod M taký, že $|DM| = 2|MA|$. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka KLM. (Jaroslav Zhouf)

Nápad. Zamerajte sa najskôr na vnútorné uhly lichobežníka $ABCD$.

Riešenie. Z predpokladov vyplýva, že spojnica stredu úsečky AB s vrcholmi C a D rozdeľuje lichobežník $ABCD$ na tri zhodné rovnostranné trojuholníky. Preto veľkosti vnútorných uhlov v lichobežníku pri vrcholoch A a B sú rovné $60°$ a pri vrcholoch C a D sú $120°$.

Zo zadania ďalej vyplýva, že trojuholníky LCK a MDL sú zhodné (podľa vety *sus*). Preto aj úsečky KL a LM a vyznačené dvojice uhlov sú zhodné; veľkosti týchto uhlov označíme α a β. Trojuholník KLM je rovnoramenný a uhly pri základni sú tiež zhodné; ich veľkosť označíme δ a veľkosť uhla KLM označíme γ.



Zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku KCL odvodíme

$$\alpha + \beta = 180° - 120° = 60°.$$

Súčet troch vyznačených uhlov s vrcholom L je priamy uhol, takže

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 120°.$$

Napokon zo súčtu vnútorných uhlov v trojuholníku KLM odvodíme

$$\delta = \frac{180° - 120°}{2} = 30°.$$

Veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka KLM sú 30° a 120°.

---

4. *V komore, kde sa rozbilo svetlo a všetko z nej musíme brať naslepo, máme ponožky štyroch rôznych farieb. Ak si chceme byť istí, že vytiahneme aspoň dve biele ponožky, musíme ich z komory priniesť 28. Aby sme mali takú istotu pre sivé ponožky, musíme ich priniesť tiež 28, pre čierne ponožky stačí 26 a pre modré ponožky 34. Koľko je spolu v komore ponožiek?* (*Eva Semerádová*)

Nápad. Koľko je v komore nebielych, nesivých, nečiernych, resp. nemodrých ponožiek?

Riešenie. Ak vytiahneme najskôr všetky nebiele ponožky a až potom dve biele, vytiahneme práve 28 ponožiek. Nebielych ponožiek je teda 26. Rovnakou úvahou dospejeme k tomu, že nesivých ponožiek je tiež 26, nečiernych je 24 a nemodrých je 32.

Nebiele ponožky zahŕňajú ponožky ostatných troch farieb; naopak biele ponožky sú zahrnuté medzi nesivými, nečiernymi a nemodrými. Podobne je to s ostatnými prípadmi. Súčet všetkých nebielych, nesivých, nečiernych a nemodrých ponožiek je preto rovný trojnásobku počtu všetkých ponožiek v komore. Tento súčet je $26 + 26 + 24 + 32 = 108$, v komore je teda $108 : 3 = 36$ ponožiek.

Poznámky. Z výsledného súčtu a z predchádzajúcich pozorovaní možno ľahko odvodiť počty ponožiek jednotlivých farieb (napr. bielych ponožiek je $36 - 26 = 10$).

Ak počty ponožiek jednotlivých farieb označíme počiatočnými písmenami oných farieb, tak predchádzajúce myšlienky môžeme zapísať takto:

$$\begin{aligned} s + č + m &= 26,\\ b + č + m &= 26,\\ b + s + m &= 24,\\ b + s + č &= 32, \end{aligned}$$

odkiaľ sčítaním dostávame

$$3(b+s+č+m)=108,$$

z čoho po delení tromi vyplýva

$$b+s+č+m=36.$$

---

5. *Číslo dňa je poradové číslo daného dňa v príslušnom mesiaci (teda napr. číslo dňa 5. augusta 2016 je 5). Ciferný súčet dňa je súčet hodnôt všetkých cifier v dátume tohto dňa (teda napr. ciferný súčet dňa 5. augusta 2016 je $5+8+2+0+1+6=22$). Šťastný deň je taký deň, ktorého číslo dňa je rovné cifernému súčtu dňa. Určte, koľko šťastných dní je v roku 2016 a ktoré dni to sú.* (*Lucie Růžičková*)

Nápad. Vyjadrite definíciu šťastného dňa pomocou rovnice.

Riešenie. Číslo dňa je nanajvýš dvojciferné číslo v rozsahu od 1 po 31, ktoré označíme $10a+b$; cifra a môže byť 0, 1, 2, alebo 3. Číslo mesiaca je nanajvýš dvojciferné číslo v rozsahu od 1 po 12, ktoré označíme $10c+d$; cifra c môže byť buď 0, alebo 1. Pri tomto označení je šťastný deň taký, že platí

$$\begin{aligned} 10a+b &= a+b+c+d+2+0+1+6, \\ 9(a-1) &= c+d. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že b môže byť ľubovoľné, a musí byť buď 2, alebo 3 (a súčet $c+d$ je deliteľný 9).

- Ak $a=2$, tak $c+d=9$, čo znamená, že $c=0$ a $d=9$.
- Ak $a=3$, tak $c+d=18$, čo vzhľadom na vyššie formulované obmedzenia nemá vyhovujúce riešenie.

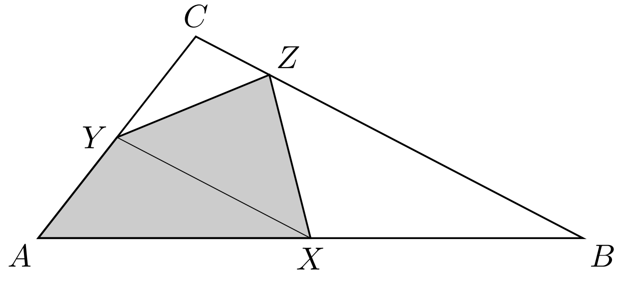
Všetky šťastné dni sú teda v mesiaci september, a to od 20. do 29., celkom 10 dní.

---

6. *Katka narysovala trojuholník ABC. Stred strany AB označila X a stred strany AC označila Y. Na strane BC chce nájsť taký bod Z, aby obsah štvoruholníka $AXZY$ bol čo najväčší. Akú časť trojuholníka ABC môže maximálne zaberať štvoruholník $AXZY$?* (*Alžbeta Bohiniková*)

Nápad. Určte, akú časť trojuholníka ABC zaberá trojuholník AXY.

Riešenie. Zo zadania vyplýva, že úsečka XY je strednou priečkou trojuholníka ABC, ktorá je rovnobežná so stranou BC. Jej dĺžka je teda polovičná vzhľadom na dĺžku strany BC a veľkosť výšky z bodu A na XY je tiež polovičná vzhľadom na veľkosť výšky z toho istého bodu na BC. To znamená, že trojuholník AXY má štvrtinový obsah vzhľadom na obsah trojuholníka ABC.



Teraz zvoľme bod Z na strane BC. Keďže úsečky BC a XY sú rovnobežné, je obsah trojuholníka XYZ, a teda aj štvoruholníka $AXZY$, rovnaký pre akokoľvek zvolený bod Z. Keďže vzdialenosť rovnobežiek BC a XY je rovnaká ako vzdialenosť XY od vrcholu A, majú trojuholníky AXY a XYZ tú istú veľkosť výšky na ich spoločnú stranu XY, a preto majú taký istý obsah. Každý z týchto dvoch trojuholníkov zaberá štvrtinu trojuholníka ABC, štvoruholník $AXZY$ preto zaberá polovicu trojuholníka ABC.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, E. Patáková, K. Pazourek, M. Petrová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Róbert Hajduk, Erika Novotná, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2015