2016/2017
66. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 28. novembra 2016.*)

1. Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existuje prirodzené číslo n také, že $p^n + 1$ je treťou mocninou niektorého prirodzeného čísla. (*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

2. Máme n^2 prázdnych škatúľ; každá z nich má štvorcové dno. Výška aj šírka každej škatule je prirodzené číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Každé dve škatule sa líšia aspoň v jednom z týchto dvoch rozmerov. Jednu škatuľu je dovolené vložiť do druhej, ak má oba rozmery menšie a aspoň jeden z rozmerov má aspoň o 2 menší. Takto môžeme vytvoriť postupnosť škatúľ vložených navzájom do seba (t. j. prvá škatuľa je vnútri druhej, druhá škatuľa je vnútri tretej atď.). Každú takúto sadu uložíme na inú poličku. Určte najmenší možný počet poličiek potrebný na uskladnenie všetkých n^2 škatúľ.
(*Peter Novotný*)

3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AK, BL, CM. Dokážte, že trojuholník ABC je rovnoramenný práve vtedy, keď platí rovnosť

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK|.$$

(*Jaromír Šimša*)

4. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré majú pre každé prirodzené číslo m nasledujúcu vlastnosť: ak označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$ všetky delitele čísla m, platí

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = m.$$

(*Pavel Calábek*)

5. Vnútri základne AB rovnoramenného trojuholníka ABC leží bod D. Zvoľme bod E tak, aby $ADEC$ bol rovnobežník. Na polpriamke opačnej k ED leží bod F taký, že $|EB| = |EF|$. Dokážte, že dĺžka tetivy, ktorú vytína priamka BE na kružnici opísanej trojuholníku ABF, je dvojnásobkom dĺžky úsečky AC. (*Jan Kuchařík, Patrik Bak*)

6. Vyriešte v obore reálnych čísel sústavu rovníc

$$\begin{aligned} k - x^2 &= y, \\ k - y^2 &= z, \\ k - z^2 &= u, \\ k - u^2 &= x \end{aligned}$$

s reálnym parametrom k z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. (*Jaroslav Švrček*)