2016/2017
66. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v piatok 20. januára 2017.*)

1. Každému vrcholu pravidelného 66-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1. Ku každej úsečke spájajúcej dva jeho vrcholy (strane či uhlopriečke) potom pripíšeme súčin čísel v jej krajných bodoch a všetky čísla pri jednotlivých úsečkách sčítame. Určte najmenšiu možnú a najmenšiu nezápornú hodnotu takéhoto súčtu. (*Pavel Calábek*)

2. Určte všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc

$$|x| + y = a,$$
$$2|y| - x = b$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia určte. (*Jaroslav Švrček*)

3. Na kružnici k sú zvolené body A, B, C, D, E (v tomto poradí) tak, že platí $|AB| = |CD| = |DE|$. Dokážte, že ťažiská trojuholníkov ABD, ACD a BDE ležia na kružnici sústrednej s kružnicou k. (*Tomáš Jurík*)

4. Nájdite všetky osemciferné čísla $*2*0*1*6$ so štyrmi neznámymi *nepárnymi* ciframi vyznačenými hviezdičkami, ktoré sú deliteľné číslom 2 016. (*Jaromír Šimša*)

5. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Označme D pätu jeho výšky z vrcholu C a M, N priesečníky osí uhlov ADC, BDC so stranami AC, BC. Dokážte, že platí

$$2|AM| \cdot |BN| = |MN|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

6. Určte všetky reálne čísla r také, že nerovnosť $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pre všetky dvojice reálnych čísel a, b, ktoré sú väčšie alebo rovné r. (*Ján Mazák*)