**2016/2017**
**66. ročník MO** *Zadania úloh domáceho kola kategórie C*

(*Termín odovzdania: v piatok 20. januára 2017.*)

**1.** Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo $a$ platí nerovnosť

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geqq a + 1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť. (*Jaroslav Švrček*)

**2.** Nájdite najväčšie prirodzené číslo $d$, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo $n$ je hodnota výrazu

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$$

deliteľná číslom $d$. (*Aleš Kobza*)

**3.** Päta výšky z vrcholu $C$ v trojuholníku $ABC$ delí stranu $AB$ v pomere $1:2$. Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka $ABC$ platí nerovnosť

$$3|a - b| < c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

**4.** Nájdite všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficientmi $a$, $b$, $c$, pre ktoré platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň

$$\big(P(1)\big)^2 + \big(P(2)\big)^2 + \big(P(3)\big)^2 = 22.$$

(*Tomáš Jurík*)

**5.** V danom trojuholníku $ABC$ zvoľme vnútri strany $AC$ body $K$, $M$ a vnútri strany $BC$ body $L$, $N$ tak, že

$$|AK| = |KM| = |MC|, \quad |BL| = |LN| = |NC|.$$

Ďalej označme $E$ priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABLK$, $F$ priesečník uhlopriečok lichobežníka $KLNM$ a $G$ priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABNM$. Dokážte, že body $E$, $F$ a $G$ ležia na ťažnici trojuholníka $ABC$ z vrcholu $C$ a určte pomer $|GF| : |EF|$. (*Šárka Gergelitsová*)

**6.** a) Marienka rozmiestni do vrcholov pravidelného osemuholníka rôzne počty od jedného po osem cukríkov. Peter si potom môže vybrať, ktoré tri kôpky cukríkov dá Marienke, ostatné si ponechá. Jedinou podmienkou je, že tieto tri kôpky ležia vo vrcholoch rovnoramenného trojuholníka. Marienka chce rozmiestniť cukríky tak, aby ich dostala čo najviac, nech už Peter trojicu vrcholov vyberie akokoľvek. Koľko ich tak Marienka zaručene získa?

b) Rovnakú úlohu vyriešte aj pre pravidelný deväťuholník, do ktorého vrcholov rozmiestni Marienka 1 až 9 cukríkov. (Medzi rovnoramenné trojuholníky zaraďujeme aj trojuholníky rovnostranné.)

(*Jaromír Šimša*)