66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie A*

---

1. *Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existuje prirodzené číslo n také, že $p^n + 1$ je treťou mocninou niektorého prirodzeného čísla.* (Ján Mazák, Róbert Tóth)

Riešenie. Predpokladajme, že pre prirodzené číslo a platí $p^n + 1 = a^3$ (zjavne $a \geqq 2$). Túto rovnosť upravíme tak, aby bolo možné jednu stranu rozložiť na súčin:

$$p^n = a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1).$$

Z tohto rozkladu vyplýva, že ak $a > 2$, sú čísla $a-1$ aj a^2+a+1 mocninami prvočísla p (s kladnými celočíselnými exponentmi).

V prípade $a > 2$ tak platí $a - 1 = p^k$, čiže $a = p^k + 1$ pre kladné celé číslo k, čo po dosadení do trojčlena $a^2 + a + 1$ dáva hodnotu $p^{2k} + 3p^k + 3$. Keďže $a - 1 = p^k < a^2 + a + 1$, je určená hodnota trojčlena $a^2 + a + 1$ vyššou mocninou prvočísla p, zaručene preto platí

$$p^k \mid p^{2k} + 3p^k + 3, \quad \text{čiže} \quad p^k \mid 3.$$

Z toho vyplýva, že musí byť $p = 3$ a $k = 1$, a teda $a = p^k + 1 = 4$. Číslo $a^2 + a + 1 = 21$ však nie je mocninou troch, a tak v prípade $a > 2$ žiadne prvočíslo p rovnici $p^n + 1 = a^3$ nevyhovuje, nech je exponent n zvolený akokoľvek.

Pre $a = 2$ dostávame rovnicu $p^n = 7$, preto je $p = 7$ jediné vyhovujúce prvočíslo.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky trojice (a, b, c) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

[62–B–I–1]

N2. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel a, b také, že $ab = a + b$. [Všetky členy dáme na ľavú stranu a rozložíme ju na súčin: $(a-1)(b-1) = 1$. Je iba jeden spôsob, ako napísať číslo 1 na pravej strane ako súčin dvoch nezáporných celých čísel, preto $a = b = 2$.]

N3. Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré existuje prirodzené číslo x také, že $p^5 + 4 = x^2$. [Zrejme $x > 2$ a z upravenej rovnice $p^5 = (x-2)(x+2)$ vzhľadom na $x+2 > x-2 > 0$ vyplýva, že dvojica $(x+2, x-2)$ je buď $(p^5, 1)$, (p^4, p), alebo (p^3, p^2). V prvom prípade je $p^5 - 1 = 4$, v druhom $p^4 - p = 4$, avšak žiadna z oboch rovníc nemá prvočíselné riešenie. Ostáva možnosť $p^3 - p^2 = 4$, ktorá dáva $p = 2$ a $x = 6$.]

D1. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré existuje prirodzené číslo a také, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

[62–A–I–1]

D2. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

je prvočíslo. [58–A–I–3]

D3. Dokážte, že pre žiadne prirodzené číslo n nie je číslo $27^n - n^{27}$ prvočíslom. [57–A–III–4]

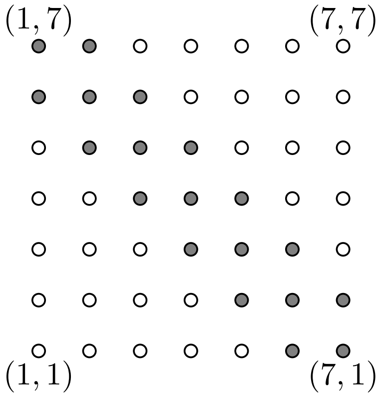
D4. Nájdite všetky celé čísla n, pre ktoré je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo. [61–A–III–1]

2. *Máme n^2 prázdnych škatúľ; každá z nich má štvorcové dno. Výška aj šírka každej škatule je prirodzené číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Každé dve škatule sa líšia aspoň v jednom z týchto dvoch rozmerov. Jednu škatuľu je dovolené vložiť do druhej, ak má oba rozmery menšie a aspoň jeden z rozmerov má aspoň o 2 menší. Takto môžeme vytvoriť postupnosť škatúľ vložených navzájom do seba (t. j. prvá škatuľa je vnútri druhej, druhá škatuľa je vnútri tretej atď.). Každú takúto sadu uložíme na inú poličku. Určte najmenší možný počet poličiek potrebný na uskladnenie všetkých n^2 škatúľ.* (Peter Novotný)

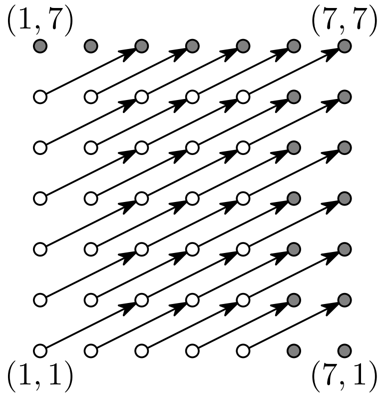
Riešenie. Ukážeme, že hľadaný minimálny počet poličiek je rovný $3n-2$. Táto odpoveď je zrejme správna pre $n = 1$ a pre $n = 2$, lebo pre také n platí $n^2 = 3n - 2$ a súčasne každá z n^2 škatúľ musí byť v takom prípade očividne uložená na inej poličke. V celom ďalšom riešení budeme preto predpokladať, že $n \geqq 3$.

Škatuliam priradíme tabuľku $n \times n$ – škatuli so šírkou w a výškou h v nej bude zodpovedať bod so súradnicami (w, h).

Žiadne dve škatule z množiny $\mathcal{S} = \{(w, h) \colon n \leqq w + h \leqq n + 2\}$ (tri najdlhšie diagonály, na obr. 1 pre $n = 7$) nemôžu byť na jednej poličke. Ak totiž sú (w, h) a (w', h') dve škatule na jednej poličke, pre ktoré platí $w < w'$ a $h < h'$, platí aj $w + 1 \leqq w'$ a $h + 1 \leqq h'$ a navyše musí byť $w + 2 \leqq w'$ alebo $h + 2 \leqq h'$. V oboch prípadoch dostaneme sčítaním $w + h + 3 \leqq w' + h'$. Ak teda $(w, h) \in \mathcal{S}$, bude $w' + h' \geqq w + h + 3 \geqq$ $\geqq n + 3$, čiže $(w', h') \notin \mathcal{S}$. Keďže $|\mathcal{S}| = 3n - 2$, poličiek musí byť aspoň $3n - 2$.



Obr. 1



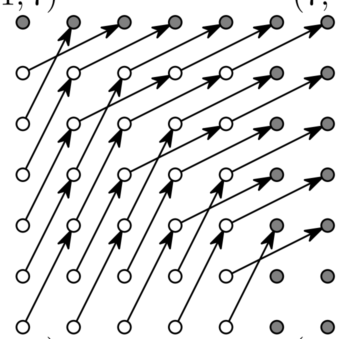
Obr. 2

Teraz ukážeme, ako rozdeliť škatule na poličky tak, aby stačilo $3n - 2$ poličiek. Možný postup pre $n = 7$ je zrejmý z obr. 2 (sady do seba vložených škatúľ sú vyznačené šípkami) a možno ho priamo zovšeobecniť pre prípad ľubovoľného $n \geqq 3$. Aj vtedy dve škatule (w, h) a (w', h') dáme na rovnakú poličku práve vtedy, keď $2(h' - h) =$ $= w' - w$. Inými slovami, začneme s „najväčšími“ škatuľami $(n - 1, h)$, (n, h) pre $h =$ $= 1, 2, \ldots, n$ a (w, n) pre $w = 1, 2, \ldots, n - 2$ a každú z týchto $3n - 2$ škatúľ položíme na zvláštnu poličku. Potom na každej poličke urobíme nasledujúci algoritmus: Pozrieme sa na poslednú škatuľu položenú na poličku, nech je to (w, h). Ak $w - 2 \geqq 1$ a $h - 1 \geqq 1$, pridáme na poličku škatuľu $(w - 2, h - 1)$ (t. j. vložíme ju do škatule na poličke) a krok algoritmu zopakujeme (inak skončíme). Zadané pravidlá sú pre každú poličku splnené triviálne. Hodnota $3n - 2$ je preto naozaj dosiahnuteľná.

Ostáva vysvetliť, prečo je každá z n^2 škatúľ uložená na nejakej poličke. Pre danú škatuľu (w, h) určíme poličku, na ktorej sa ocitne, postupným súčasným zväčšovaním

w o 2 a h o 1, až nakoniec dostaneme jednu z $3n-2$ najväčších škatúľ so šírkou $w \in \{n-1, n\}$ či výškou $h = n$. Pri tomto postupe zväčšovania dostaneme podľa našej procedúry postupnosť do seba vložených škatúľ uložených na poličke, ktorú sme na úvod priradili spomenutej najväčšej škatuli. Počet $3n-2$ škatúľ je preto naozaj postačujúci.

Poznámka. Je zaujímavé, že existujú aj iné vyhovujúce uloženia všetkých n^2 škatúľ s rovnakou sadou $3n-2$ najväčších škatúľ na jednotlivých poličkách, ktorú sme využili v našom riešení – pre $n = 7$ je jedno také odlišné uloženie znázornené na obr. 3.



Obr. 3

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dve políčka na šachovnici nazveme susedné, ak majú spoločnú stranu. Koľko najviac políčok možno vybrať na šachovnici $2n \times 2n$ tak, aby žiadne dve z vybraných políčok neboli susedné? [Polovicu. Celá šachovnica sa dá rozdeliť na disjunktné dvojice susedných políčok a z každej dvojice môžeme vybrať maximálne jedno políčko. Polovica sa dá dosiahnuť napr. výberom všetkých políčok jednej farby pri klasickom ofarbení šachovnice.]

N2. Vyriešte zadanú úlohu pre $n = 4$ a $n = 5$. Nestačí uhádnuť minimálny počet poličiek: treba jednak ukázať, že je možné škatule na určený počet poličiek uložiť, jednak zdôvodniť, že menší počet poličiek nebude stačiť.

N3. Pre $n \in \{3, 4\}$ nájdite čo najväčšiu sadu škatúľ takú, že žiadna z nich sa nedá vložiť do inej. Skúste svoju sadu zovšeobecniť pre väčšie n.

Výborným doplňujúcim materiálom (vhodným aj pre samostatnú prípravu žiakov) je kapitola 3.2 v Zbierke KMS dostupnej na stránke `http://kms.sk/zbierka`.

---

3. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s výškami AK, BL, CM. Dokážte, že trojuholník ABC je rovnoramenný práve vtedy, keď platí rovnosť*

$$|AM| + |BK| + |CL| = |AL| + |BM| + |CK|.$$

(*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Body K, L, M sú definované ako päty výšok a my potrebujeme vyjadriť kolmosť tak, aby sa s ňou dobre pracovalo; keďže dokazované tvrdenie pracuje s dĺžkami úsečiek, a nie s uhlami, zapíšeme určujúcu vlastnosť bodov K, L, M pomocou dĺžok úsečiek.

Keďže priamky AB a CM sú na seba kolmé, je $|AC|^2 - |BC|^2 = |AM|^2 - |BM|^2$. (To vyplýva z Pytagorovej vety použitej na pravouhlé trojuholníky AMC a BMC, lebo

$|AC|^2 = |AM|^2 + |CM|^2$, $|BC|^2 = |BM|^2 + |CM|^2$.) Z tejto rovnosti hneď vyplýva, že pri štandardnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí

$$|AM| - |BM| = \frac{b^2 - a^2}{|AM| + |BM|} = \frac{b^2 - a^2}{c}$$

a analogicky

$$|BK| - |CK| = \frac{c^2 - b^2}{a} \qquad \text{a} \qquad |CL| - |AL| = \frac{a^2 - c^2}{b}.$$

Rovnosť zo zadania sa teda dá prepísať ako

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{b^2 - c^2}{a} + \frac{c^2 - a^2}{b} = 0,$$
$$ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) = 0.$$

Pokúsme sa výraz na ľavej strane rozložiť na súčin. Budeme sa naň pozerať ako na kubický mnohočlen P v premennej a. Je jednoduché overiť, že pre rovnoramenný trojuholník je ľavá strana nulová, preto $P(b) = 0$ a $P(c) = 0$. Poznáme teda dva korene mnohočlena P. Po vydelení $P(a)$ zodpovedajúcimi koreňovými činiteľmi (teda výrazom $(a-b)(a-c)$) už zostane iba lineárny mnohočlen $a(b-c) + b^2 - c^2$, ktorý ľahko rozložíme na súčin. Keď to všetko zhrnieme, vidíme, že rovnosť zo zadania je ekvivalentná s rovnosťou

$$(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c) = 0.$$

Je jasné, že získaná rovnosť platí práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnoramenný.

Iné riešenie. Predpokladajme najskôr, že trojuholník ABC je rovnoramenný, že teda napríklad bez ujmy na všeobecnosti $|AC| = |BC|$. Z osovej súmernosti trojuholníka ABC potom vyplývajú rovnosti $|AM| = |BM|$, $|AL| = |BK|$ a $|CL| = |CK|$, takže rovnosť zo zadania je splnená.

Predpokladajme teraz naopak, že platí rovnosť zo zadania. Prepíšeme ju na tvar

$$(|AM| - |BM|) + (|BK| - |CK|) + (|CL| - |AL|) = 0. \tag{1}$$

Pri štandardnom označení dĺžok strán a vnútorných uhlov trojuholníka ABC s polomerom r kružnice opísanej platí

$$|AM| - |BM| = b\cos\alpha - a\cos\beta = 2r\sin\beta\cos\alpha - 2r\sin\alpha\cos\beta = 2r\sin(\beta - \alpha),$$

a preto z rovnosti (1) vyplýva

$$\sin(\beta - \alpha) + \sin(\gamma - \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 0. \tag{2}$$

Vďaka goniometrickému pravidlu

$$x + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x + \sin y + \sin z = -4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}, \tag{3}$$

ktoré za okamih dokážeme, z rovnosti (2) vyplýva

$$\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Taká rovnosť zrejme nastane, len keď sa niektoré dva z vnútorných uhlov α, β, γ trojuholníka ABC rovnajú, čiže trojuholník ABC je rovnoramenný.

Ostáva teda overiť pravidlo (3). Za predpokladu $x+y+z=0$ platí

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y+\sin z&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\sin(x+y)=\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\Bigl(\cos\frac{x-y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\Bigr)=\\&=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot(-2)\cdot\sin\frac{(x-y)+(x+y)}{4}\sin\frac{(x-y)-(x+y)}{4}=\\&=-4\sin\frac{-z}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{-y}{2}=-4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}.\end{aligned}$$

Dôkaz je hotový.

Iné riešenie. Ešte jedným algebraickým postupom ukážeme, že za predpokladu

$$|AM|+|BK|+|CL|=|AL|+|BM|+|CK| \tag{1}$$

je trojuholník ABC rovnoramenný. Rovnako ako v prvom riešení na to najskôr využijeme rovnosti

$$\begin{aligned}|AM|^2-|BM|^2&=|AC|^2-|BC|^2,\\|BK|^2-|CK|^2&=|AB|^2-|AC|^2,\\|CL|^2-|AL|^2&=|BC|^2-|AB|^2,\end{aligned}$$

ktorých sčítaním dostaneme po úprave

$$|AM|^2+|BK|^2+|CL|^2=|AL|^2+|BM|^2+|CK|^2. \tag{2}$$

Keďže výšky trojuholníka prechádzajú jedným bodom, platí podľa Cevovej vety tiež rovnosť

$$|AM|\cdot|BK|\cdot|CL|=|AL|\cdot|BM|\cdot|CK|. \tag{3}$$

Povšimneme si ešte, že vďaka algebraickej identite

$$(u+v+w)^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)$$

vyplýva z (1) a (2) posledná potrebná rovnosť

$$|AM|\cdot|BK|+|BK|\cdot|CL|+|CL|\cdot|AM|=|AL|\cdot|BM|+|BM|\cdot|CK|+|CK|\cdot|AL|. \tag{4}$$

Teraz z rovností (1), (3), (4) učiníme rozhodujúci algebraický záver: keďže kubická rovnica s trojicou koreňov

$$|AM|,\ |BK|,\ |CL|$$

je zároveň kubickou rovnicou s trojicou koreňov

$$|AL|,\ |BM|,\ |CK|,$$

sú obe trojice koreňov rovnaké (až na poradie, v akom sme korene vypísali).

Z predpokladu (1) sme tak odvodili, že úsečka AM je zhodná s jednou z úsečiek AL, BM, CK. Je zrejmé, že tieto tri možnosti nastanú práve v prípadoch, keď platí $|AB|=|AC|$, $|AC|=|BC|$, resp. $|AB|=|BC|$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že priamky AB a CD ležiace v jednej rovine sú na seba kolmé práve vtedy, keď platí $|AC|^2 - |BC|^2 = |AD|^2 - |BD|^2$. [Stačí dokázať, že ak A, B sú dva rôzne body v rovine a k je reálne číslo, je množinou bodov X takých, že $|AX|^2 - |BX|^2 = k$, priamka kolmá na priamku AB. Na dôkaz tohto tvrdenia stačí uvažovať pätu P kolmice z bodu X na priamku AB a použiť Pytagorovu vetu v trojuholníkoch APX a BPX; dostaneme $|AX|^2 - |BX|^2 = (|AP|^2 + |PX|^2) - (|BP|^2 + |PX|^2) = |AP|^2 - |BP|^2$. Ak je hodnota $|AX|^2 - |BX|^2$ konštantná, je päta kolmice z X na AB vždy rovnaká pre všetky body X, leží teda na priamke kolmej na AB. Otočením úvahy hneď vidíme, že každý bod tejto priamky má požadovanú vlastnosť.]

N2. Dokážte, že pre ľubovoľný mnohočlen $P(x)$ a ľubovoľné reálne číslo r platí nasledujúce tvrdenie: ak $P(r) = 0$, je mnohočlen $P(x)$ deliteľný dvojčlenom $x - r$. [Po vydelení $P(x)$ činiteľom $x - r$ dostaneme podiel $Q(x)$ a zvyšok $R(x)$, ktorý má menší stupeň ako $x - r$, musí to teda byť konštantný mnohočlen. Po dosadení $x = r$ do rovnosti $P(x) = (x - r)Q(x) + R(x)$ máme $R(r) = 0$, čiže zvyšok je nulový mnohočlen.]

N3. Rozložte na súčin výraz $bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a + ab^2 - a^2b$. [$(a-b)(b-c)(c-a)$. Považujte daný výraz za mnohočlen v premennej a a všimnite si, že b aj c sú jeho korene. Alebo trochu prácnejšie: $bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a + ab^2 - a^2b = bc(c-b) + ca(a-c) + ab(b-a) = bc(c-b) - abc + abc + ca(a-c) + ab(b-a) = bc(c-b-a) + ca(b+a-c) + ab(b-a) = c(b+a-c)(a-b) + ab(b-a) = (a-b)(bc - c^2 + ca - ab) = (a-b)(b-c)(c-a)$.]

D1. Vnútri strany AB ľubovoľného trojuholníka ABC leží bod D. Dokážte, že platí

$$|AB| \cdot |CD|^2 + |AB| \cdot |AD| \cdot |BD| = |BC|^2 \cdot |AD| + |AC|^2 \cdot |BD|.$$

[Tento fakt je známy ako Stewartova veta. Pre trojuholníky ADC, BDC zapíšte kosínusovú vetu s uhlami ADC, BDC a využite na elimináciu ich kosínusov to, že sú to dve navzájom opačné čísla.]

D2. Dokážte, že ak pre reálne čísla a, b, c platí $a^2b^4 + b^2c^4 + c^2a^4 = a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2$, majú niektoré dve z čísel a, b, c rovnaké absolútne hodnoty. [$L - P = (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$]

---

4. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré majú pre každé prirodzené číslo m nasledujúcu vlastnosť: ak označíme $d_1, d_2, \ldots, d_n$ všetky delitele čísla m, platí*

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = m.$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Ukážeme, že jediným riešením je funkcia f taká, že

$$f(m) = \begin{cases} p, & \text{ak } m \text{ je netriviálnou mocninou prvočísla } p, \text{ t. j. } m = p^k,\ k \geqq 1, \\ 1 & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Číslo 1 má jediného prirodzeného deliteľa 1, preto zo zadanej rovnosti pre $m = 1$ vyplýva $f(1) = 1$.

Nech $m = p$ je prvočíslo. Potom musí platiť

$$f(1) \cdot f(p) = p, \quad \text{čiže} \quad f(p) = p.$$

Pre $m = p^2$ teda dostaneme

$$f(1) \cdot f(p) \cdot f(p^2) = p^2, \quad \text{čiže} \quad f(p^2) = p$$

a všeobecne pre prirodzené $k > 1$ a $m = p^k$

$$f(1) \cdot f(p) \cdot f(p^2) \cdot \ldots \cdot f(p^k) = p^k.$$

Matematickou indukciou podľa k tak ľahko ukážeme, že pre všetky prirodzené čísla k musí platiť $f(p^k) = p$.

Uvažujme teraz prirodzené číslo m s aspoň dvoma rôznymi prvočíselnými deliteľmi, ktorého prvočíselný rozklad je $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, pričom $k \geqq 2$ a $\alpha_i \geqq 1$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Medzi deliteľmi čísla m sú určite všetky mocniny

$$p_1,\ p_1^2,\ \dots,\ p_1^{\alpha_1},\ \ p_2,\ p_2^2,\ \dots,\ p_2^{\alpha_2},\ \ \dots,\ \ p_k,\ p_k^2,\ \dots,\ p_k^{\alpha_k}$$

jeho jednotlivých prvočiniteľov, pritom len samotný súčin prislúchajúcich funkčných hodnôt

$$\begin{aligned} &f(p_1)f(p_1^2)\dots f(p_1^{\alpha_1})f(p_2)f(p_2^2)\dots f(p_2^{\alpha_2})\dots f(p_k)f(p_k^2)\dots f(p_k^{\alpha_k}) = \\ &= \underbrace{p_1p_1\dots p_1}_{\alpha_1}\underbrace{p_2p_2\dots p_2}_{\alpha_2}\dots\underbrace{p_kp_k\dots p_k}_{\alpha_k} = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k} = m \end{aligned}$$

dáva, ako vidíme, hodnotu m. To znamená, že súčin všetkých ďalších funkčných hodnôt zvyšných deliteľov (z ktorých ani jeden nie je netriviálnou mocninou prvočísla) vrátane hodnoty $f(m)$ musí byť rovný 1, takže všetky činitele nevynímajúc $f(m)$ sa rovnajú 1.

Tým je hľadaná funkcie f jednoznačne určená a zároveň je z poslednej rovnosti zrejmé, že má požadované vlastnosti.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte matematickou indukciou, že každé prirodzené číslo väčšie ako 1 sa dá rozložiť na súčin prvočísel.

N2. Určte hodnoty funkcie f, ktorá spĺňa podmienku zo zadania, pre mocniny trojky.

N3. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré majú pre každé prirodzené číslo m nasledujúcu vlastnosť: ak označíme $d_1, d_2, \dots, d_n$ všetky delitele čísla m, platí

$$f(d_1) \cdot f(d_2) \cdot \ldots \cdot f(d_n) = 2^n.$$

[Matematickou indukciou možno dokázať, že $f(x) = 2$ pre každé prirodzené číslo x. Ak označíme delitele čísla m vzostupne podľa veľkosti $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_n = m$, máme z indukčného predpokladu $2^{n-1}f(m) = 2^n$ čiže $f(m) = 2$.]

D1. Určte všetky funkcie $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky celé čísla x, y platí

$$f\Big(f(x) + y\Big) = x + f(y + 2\,006).$$

[56–A–I–6]

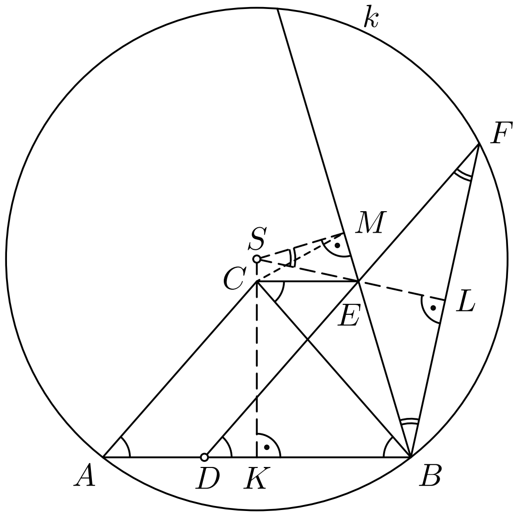
D2. Označme $\mathbb{N}$ množinu všetkých prirodzených čísel a uvažujme všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f\Big(xf(y)\Big) = yf(x).$$

Určte najmenšiu možnú hodnotu $f(2\,007)$. [56–A–III–3]

5. *Vnútri základne AB rovnoramenného trojuholníka ABC leží bod D. Zvoľme bod E tak, aby $ADEC$ bol rovnobežník. Na polpriamke opačnej k ED leží bod F taký, že $|EB| = |EF|$. Dokážte, že dĺžka tetivy, ktorú vytína priamka BE na kružnici opísanej trojuholníku ABF, je dvojnásobkom dĺžky úsečky AC.* (Jan Kuchařík, Patrik Bak)

Riešenie. Označme S stred kružnice opísanej trojuholníku ABF a K, L, M päty kolmíc z bodu S na priamky AB, BF, BE. Ako ľahko overíme, uhol ABF je tupý, bod S leží na osi CK strany AB vnútri polroviny opačnej k CEB a bod E leží vnútri úsečky SL, takže je vnútorným bodom úsečky BM (obr. 4). Keďže bod M je stredom uvažovanej tetivy a $|AC| = |BC|$, stačí ukázať, že $|BM| = |BC|$.



Obr. 4

Označme α a β veľkosti uhlov pri základniach rovnoramenných trojuholníkov ABC a BFE. Keďže $|\measuredangle BDF| = \alpha$, z trojuholníka DBF máme

$$|\measuredangle CBM| = 180° - 2(\alpha + \beta). \tag{1}$$

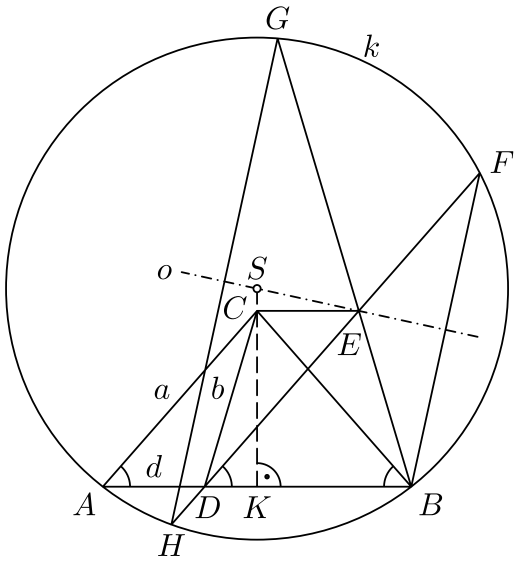
Z rovnobežnosti $CE \parallel AB$ ďalej vyplýva, že aj $|\measuredangle BCE| = \alpha$, a zo zrejmej podobnosti pravouhlých trojuholníkov $SEM \sim BEL$ máme $|\measuredangle ESM| = \beta$. A keďže CE je rovnako ako AB kolmé na SK, je štvoruholník $CEMS$ tetivový, takže $|\measuredangle ECM| = |\measuredangle ESM| = \beta$. Spolu teda pre veľkosti uhlov BCM a BMC dostávame

$$|\measuredangle BCM| = |\measuredangle BCE| + |\measuredangle ECM| = \alpha + \beta$$

a podľa (1) môžeme dopočítať

$$|\measuredangle BMC| = 180° - |\measuredangle CBM| - |\measuredangle BCM| = 2(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) = \alpha + \beta.$$

v trojuholníku BCM teda platí $|\measuredangle BMC| = |\measuredangle BCM|$. Preto $|BM| = |BC|$.



Obr. 5

Iné riešenie. Využijeme súmernosť podľa osi o úsečky BF. Na priamke o leží bod E aj stred S kružnice k opísanej trojuholníku ABF. Tetiva, ktorú vytína priamka BE v kružnici k, sa v uvedenej osovej súmernosti zobrazí na úsečku FH, pričom H je priesečník priamky FE s kružnicou k rôzny od F (obr. 5).

Keďže $|DE| = |AC|$, treba dokázať, že $|HD| + |DF| = 2|AC|$.

Označme $|AC| = |BC| = a$, $|AB| = c$, $|AD| = d$, $|CD| = b$.

Štvoruholník $DBEC$ je vďaka zhodným uhlom CBD a EDB osovo súmerný, je to teda rovnoramenný lichobežník alebo pravouholník, preto platí aj $|BE| = |CD| = b$ a

$$\begin{aligned} |DF| = |DE| + |EF| = |AC| + |BE| &= \\ = |AC| + |CD| = a + b. \end{aligned} \tag{1}$$

Treba teda dokázať, že

$$|HD| = 2|AC| - |DF| = 2a - (a + b) = a - b. \tag{2}$$

Z mocnosti bodu D ku kružnici k vyplýva

$$|HD| \cdot |DF| = |AD| \cdot |BD| = d(c - d),$$

čo je podľa (1) ekvivalentné rovnosti

$$|HD| = \frac{d(c - d)}{a + b}. \tag{3}$$

Porovnaním s (2) tak dostávame, že má platiť

$$d(c - d) = a^2 - b^2. \tag{4}$$

Pre $D = K$, pričom K označuje stred úsečky AB (a zároveň pätu kolmice z bodu C na AB), je $c = 2d$ a posledná rovnosť sa tak zmení na Pytagorovu vetu pre trojuholník

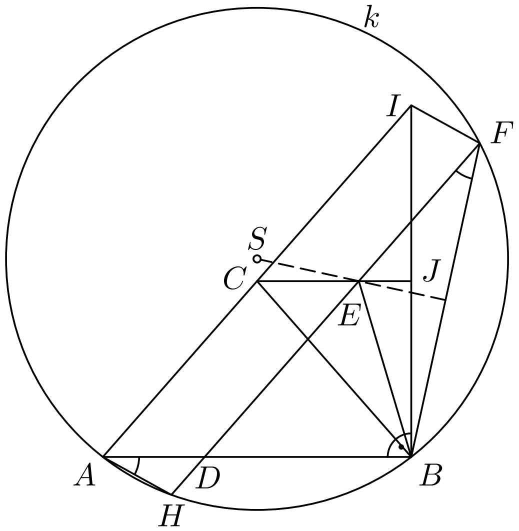
AKC. Pre $D \neq K$ potom z Pytagorovej vety použitej na trojuholníky DKC a AKC vyplýva

$$
\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (|AK|^2 + |KC|^2) - (|DK|^2 + |KC|^2) = |AK|^2 - |DK|^2 = \\
&= \big||AK| - |DK|\big|(|AK| + |DK|) = d(c - d),
\end{aligned}
$$

bez ohľadu na polohu bodu D vnútri AB. Tým je dokázaná rovnosť (4), teda je dokázané aj tvrdenie úlohy.

Poznámka. Rovnosť (4) je priamym dôsledkom Ptolemaiovej vety použitej v tetivovom lichobežníku $DBEC$, ktorého obe uhlopriečky majú dĺžku a, ramená dĺžku b a základne dĺžky $c - d$ a d.

Iné riešenie. Tak ako v predošlom riešení využijeme bod H a dokážeme, že $|HF| = 2|AC|$. Pridáme však ďalšie dva body: bod I, ktorý je obrazom bodu A v stredovej súmernosti podľa C, a bod J, ktorý je stredom úsečky BI. Body C, E, J sú kolineárne, pretože úsečka CJ je strednou priečkou v trojuholníku ABI, a teda rovnobežná s úsečkou AB (obr. 6). Dokážeme, že $AHFI$ je rovnobežník; z toho hneď vyplynie dokazované tvrdenie. Keďže $AI \parallel HF$, stačí dokázať, že $AH \parallel IF$.



Obr. 6

Keďže $|CA| = |CB| = |CI|$, leží bod B na Tálesovej kružnici nad priemerom AI, takže uhol ABI je pravý. Bod E leží na priesečníku osí úsečiek BF a BI, preto je stredom kružnice opísanej trojuholníku BFI. Pre uhol FIB nad tetivou BF tejto kružnice tak máme $|\measuredangle FIB| = \frac{1}{2}|\measuredangle FEB|$ (využívame, že bod F leží v polrovine opačnej k BIA, čo platí vďaka tomu, že os SE úsečky BF pretína polpriamku opačnú k BA). Platí teda

$$
\begin{aligned}
|\measuredangle FIA| &= |\measuredangle BIA| + |\measuredangle FIB| = (90^\circ - |\measuredangle IAB|) + \tfrac{1}{2}|\measuredangle FEB| = \\
&= 90^\circ - |\measuredangle IAB| + \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2|\measuredangle BFE|) = 180^\circ - |\measuredangle IAB| - |\measuredangle BFH| = \\
&= 180^\circ - |\measuredangle IAB| - |\measuredangle BAH| = 180^\circ - |\measuredangle IAH|,
\end{aligned}
$$

čiže $AH \parallel IF$. Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pomocou počítania veľkostí uhlov dokážte, že výšky v ostrouhlom trojuholníku ABC sa pretínajú v jednom bode. [Označme postupne D a E päty výšok z vrcholov A a B, ďalej P priesečník úsečiek AD a BE a X priesečník CP a AB. Dokážeme, že priamka CP je kolmá na AB. Štvoruholníky $ABDE$ a $CDPE$ sú tetivové, pretože ich vrcholy ležia na Tálesových kružniciach s priemermi AB a CP. Preto uhly BAD, BED, PCD majú všetky rovnakú veľkosť $90° - |\measuredangle ABC|$. Uhol CXB, ktorý dopočítame zo známych veľkostí zvyšných uhlov v trojuholníku CXB, je teda pravý.]

N2. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s pätami výšok D, E, F ležiacimi postupne na stranách AB, BC, CA. Obraz bodu F v stredovej súmernosti podľa stredu strany AB leží na priamke DE. Určte veľkosť uhla BAC. [57–A–II–3]

N3. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC taký, že $|AC| \neq |BC|$. Vnútri jeho strán BC a AC uvažujme body D a E, pre ktoré je $ABDE$ tetivový štvoruholník. Priesečník jeho uhlopriečok AD a BE označme P. Dokážte, že ak sú priamky CP a AB navzájom kolmé, tak P je priesečníkom výšok trojuholníka ABC. [56–A–III–5; Označme M pätu výšky z vrcholu C; bod P leží na úsečke CM. Uvažujme úsečku $B'C$, ktorá je obrazom úsečky BC v osovej súmernosti s osou CM. Uhly CBP, $CB'P$ sú vďaka symetrii zhodné. Body A, B, D, E ležia podľa zadania na kružnici, preto uhly CAP a CBP sú zhodné. Z bodov A a B' je vidno úsečku CP pod rovnakým uhlom, navyše sú v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku CP, a teda $PCAB'$ je tetivový štvoruholník. Preto uhly $B'AP$, $B'CP$, BCP majú všetky zhodnú veľkosť $90° - \beta$. Ostáva dopočítať veľkosti uhlov v trojuholníku ADB a vidíme, že uhol ADB je pravý, preto P je priesečník výšok. Kľúčová idea tohto riešenia – využitie vhodnej osovej súmernosti – je veľmi užitočná aj v súťažnej úlohe.]

N4. Daný je trojuholník ABC a vnútri neho bod P. Označme X priesečník priamky AP so stranou BC a Y priesečník priamky BP so stranou AC. Dokážte, že štvoruholník $ABXY$ je tetivový práve vtedy, keď druhý priesečník (rôzny od bodu C) kružníc opísaných trojuholníkom ACX a BCY leží na priamke CP. [55–A–II–3]

N5. Vnútri strany BC ostrouhlého trojuholníka ABC zvoľme bod D a na úsečke AD bod P tak, aby neležal na ťažnici z vrcholu C. Priamka tejto ťažnice pretne kružnicu opísanú trojuholníku CPD v bode, ktorý označíme K ($K \neq C$). Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku AKP prechádza okrem bodu A ďalším pevným bodom, ktorý od výberu bodov D a P nezávisí. [58–A–II–4]

D1. V tetivovom štvoruholníku $ABCD$ označme L, M stredy kružníc vpísaných postupne do trojuholníkov BCA, BCD. Ďalej označme R priesečník kolmíc vedených z bodov L a M postupne na priamky AC a BD. Dokážte, že trojuholník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D2. V rovine, v ktorej je daná úsečka AB, uvažujme trojuholníky XYZ také, že X je vnútorným bodom úsečky AB, trojuholníky XBY a XZA sú podobné ($\triangle XBY \sim$ $\sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z ležia v tomto poradí na kružnici. Nájdite množinu stredov všetkých úsečiek YZ. [63–A–III–2]

D3. V ostrouhlom trojuholníku ABC, v ktorom $|AC| \neq |BC|$, označme D a E päty výšok z vrcholov A a B. Nech V je priesečník výšok trojuholníka ABC, bod F je priesečník priamok AB a DE a bod S je stred strany AB. Ďalej nech K je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom BDS a AES rôzny od bodu S.
   a) Dokážte, že body D, E, V, K ležia na jednej kružnici.
   b) Dokážte, že body F, V, K ležia na jednej priamke.
   [57–A–III–2]

Výborným materiálom (vhodným aj pre samostatnú prípravu žiakov) sú kapitoly 2.1 a 2.2 v Zbierke KMS dostupnej na stránke `http://kms.sk/zbierka`.

---

6. *Vyriešte v obore reálnych čísel sústavu rovníc*

$$\begin{aligned} k - x^2 &= y, \\ k - y^2 &= z, \\ k - z^2 &= u, \\ k - u^2 &= x \end{aligned}$$

s reálnym parametrom k z intervalu $\langle 0,1\rangle$. *(Jaroslav Švrček)*

Riešenie. Odčítaním tretej rovnice danej sústavy od prvej rovnice dostaneme

$$z^2 - x^2 = (z-x)(z+x) = y - u. \tag{1}$$

Podobne z druhej a štvrtej rovnice danej sústavy vyjde

$$y^2 - u^2 = (y-u)(y+u) = x - z. \tag{2}$$

Zo vzťahov (1) a (2) potom vyplýva $x = z$ práve vtedy, keď $y = u$. Preto ďalej rozlíšime dva prípady označené ako a) a b).

a) Predpokladajme najskôr, že $x = z$ a $y = u$, t. j. riešenie danej sústavy rovníc budeme hľadať v tvare usporiadaných štvoríc $(x,y,z,u) = (x,y,x,y)$ s neznámymi x a y. V tomto prípade môžeme pôvodnú sústavu rovníc redukovať na sústavu dvoch rovníc s neznámymi x, y v tvare

$$\begin{aligned} k - x^2 &= y,\\ k - y^2 &= x. \end{aligned}$$

Odčítaním jednej rovnice od druhej dôjdeme po jednoduchej úprave k nasledujúcej rovnici v súčinovom tvare:

$$(y-x)(y+x-1) = 0.$$

Takže nastáva jedna z dvoch (ako sa ukáže, nie úplne disjunktívnych) možností.

Pri prvej možnosti $y - x = 0$ prechádza redukovaná sústava po dosadení $y = x$ na jedinú kvadratickú rovnicu

$$x^2 + x - k = 0.$$

Táto rovnica má pre ľubovoľnú hodnotu parametra $k \in \langle 0,1\rangle$ (ako je vymedzené v zadaní) dva rôzne reálne korene, a to

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4k+1}}{2}.$$

Zadaná úloha má preto najmenej dve riešenia

$$x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = \frac{-1+\sqrt{4k+1}}{2}, \quad x_2 = y_2 = z_2 = u_2 = \frac{-1-\sqrt{4k+1}}{2}. \tag{3}$$

Pri druhej možnosti $x+y-1 = 0$ sa dosadením $y = 1-x$ dostaneme od redukovanej sústavy ku kvadratickej rovnici

$$x^2 - x + (1-k) = 0.$$

Keďže jej diskriminant je rovný $4k-3$, má uvedená rovnica reálne korene iba v prípade, že $k \geqq 3/4$. Týmito koreňmi sú reálne čísla

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{4k-3}}{2} \quad \text{a} \quad x_4 = \frac{1-\sqrt{4k-3}}{2}.$$

Zodpovedajúce hodnoty $y = 1 - x$ sú potom

$$y_3 = \frac{1-\sqrt{4k-3}}{2} \quad \text{a} \quad y_4 = \frac{1+\sqrt{4k-3}}{2}.$$

Pre najmenšiu hodnotu $k = 3/4$ však platí $x_3 = y_3 = x_4 = y_4 = 1/2$, takže žiadne nové riešenie nezahrnuté do rozboru prvej možnosti $x = y$ nedostávame – prichádzame znova k prvému riešeniu z (3), ktoré samozrejme zodpovedá parametru $k = 3/4$. Pre ostatné možné hodnoty parametra k dané odvodenou podmienkou $k > 3/4$ a obmedzením $k \leqq 1$ má zadaná úloha ďalšie dve riešenia

$$(x, y, z, u) = (x_3, y_3, x_3, y_3) \quad \text{a} \quad (x, y, z, u) = (x_4, y_4, x_4, y_4). \tag{4}$$

Tieto dve riešenia sú vďaka nerovnostiam $x_3 \neq x_4$, $x_3 \neq y_3$ a $x_4 \neq y_4$ naozaj navzájom rôzne a odlišné od oboch riešení z (3).

b) Teraz predpokladajme, že $x \neq z$ a $y \neq u$. V takom prípade môžeme po dosadení $x-z$ zo vzťahu (2) do ľavej strany rovnice (1) následne vydeliť obe jej strany nenulovým číslom $y - u$ a získať tak rovnicu

$$(x + z)(y + u) = -1. \tag{5}$$

Využijeme ju ďalej k jedinému zrejmému záveru: *všetky štyri čísla x, y, z, u nemôžu byť záporné* (v opačnom prípade by totiž ľavá strana (5) bola kladná). Preto je *niektoré* z čísel x, y, z, u *nezáporné*. Ak však ukážeme, že vďaka zadanému predpokladu $k \in \langle 0, 1\rangle$ vyplývajú z rovníc pôvodnej sústavy implikácie

$$x \geqq 0 \;\Rightarrow\; y \geqq 0 \;\Rightarrow\; z \geqq 0 \;\Rightarrow\; u \geqq 0 \;\Rightarrow\; x \geqq 0, \tag{6}$$

bude odvodený záver o nezápornosti *niektorého* z čísel x, y, z, u znamenať nezápornosť *všetkých štyroch*, a tak sa dostaneme do sporu s už zmieneným dôsledkom rovnice (5). V prípade b) tak zadaná úloha nebude mať žiadne riešenie.

Ostáva dokázať napríklad prvú z implikácií (6), dôkazy ostatných troch totiž budú analogické. Nech teda $x \geqq 0$. Zo štvrtej rovnice pôvodnej sústavy vyplýva nerovnosť $x \leqq k$, takže vzhľadom na $k \leqq 1$ máme $0 \leqq x \leqq k \leqq 1$. To však znamená, že $x^2 \leqq k$, pretože $t^2 \leqq t$ pre každé $t \in \langle 0, 1\rangle$. Z odvodenej nerovnosti $x^2 \leqq k$ už podľa prvej rovnice sústavy vyplýva $y \geqq 0$, ako sme chceli dokázať. Rozbor prípadu b) je tak hotový (s negatívnym záverom).

Záver. V prípade $0 \leqq k \leqq 3/4$ má zadaná sústava práve dve riešenia, ktoré sú dané vzorcami (3), a v prípade $3/4 < k \leqq 1$ má práve štyri riešenia, ktoré sú určené vzorcami (3) a (4).

Iné riešenie. Uvažujme funkciu $f(x) = k - x^2$, pomocou ktorej je možné danú sústavu rovníc zapísať ako $f(x) = y$, $f(y) = z$, $f(z) = u$, $f(u) = x$. Ak postupne dosadíme do štvrtej rovnice tretiu, druhú a nakoniec prvú, dostaneme $f(f(f(f(x)))) = x$, čiže $f^4(x) = x$. (Symbolom f^k budeme označovať *k-tu iteráciu* funkcie f. V úlohe teda hľadáme práve také reálne čísla x, ktoré sú *pevnými bodmi* štvrtej iterácie danej funkcie f.)

Vyriešime všeobecnejšiu úlohu: za toho istého predpokladu $0 \leqq k \leqq 1$ ako v súťažnej úlohe nájdeme všetky reálne x také, že $f^{2n}(x) = x$ pre dané prirodzené číslo n.

Predpokladajme, že číslo x túto vlastnosť má, a poďme o ňom zistiť viac. Predtým si však všimnime, že s číslom x vyhovuje rovnici $f^{2n}(x) = x$ zrejme aj každé číslo $f^i(x)$, pričom $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 2n-1\}$.

Začneme veľmi užitočným pozorovaním: funkcia f je rastúca na intervale $(-\infty, 0\rangle$ a klesajúca na intervale $\langle 0, \infty)$, takže $f(0)$ je jej maximálna hodnota. Ukážeme, že pre každé hľadané x z predchádzajúceho odseku platí:

(i) *ak* $x \geqq 0$, *sú čísla* $f(x), f^2(x), \ldots, f^{2n-1}(x)$ *nezáporné;*
(ii) *ak* $x < 0$, *sú čísla* $f(x), f^2(x), \ldots, f^{2n-1}(x)$ *záporné.*

Nech teda $x \geqq 0$. Keďže $x = f^{2n}(x)$, patrí x do oboru hodnôt funkcie f, preto $0 \leqq x \leqq f(0)$. Na intervale $\langle 0, f(0)\rangle$ je funkcia f klesajúca, preto $f(x) \geqq f(f(0))$. Pritom $f(f(0)) = f(k) = k - k^2 \geqq 0$ (pretože $k \in \langle 0, 1\rangle$), a teda aj $f(x) \geqq 0$. Opakovaním tejto úvahy dostaneme tvrdenie (i).

Tvrdenie (ii) dokážeme sporom. Ak by nebolo pravdivé, spolu s $x < 0$ by pre nejaké $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ platilo $f^i(x) \geqq 0$. Potom by však podľa dokázaného tvrdenia (i) – s číslom x zameneným za číslo $f^i(x)$ – pre všetky $j \in \{i+1, i+2, \ldots, i+2n-1\}$ platilo $f^j(x) \geqq 0$, a to je pre $j = 2n$ spor: $0 > x = f^{2n}(x) \geqq 0$.

Teraz už sme na riešenie rovnice $f^{2n}(x) = x$ úplne pripravení. Kvôli prehľadnosti najskôr uvedieme výpis prípadov, na ktoré celý postup rozdelíme:

a) $f(x) = x$; b) $f(x) \neq x$ a $x < 0$; c) $f(x) \neq x$ a $x \geqq 0$.

a) Korene kvadratickej rovnice $f(x) = x$ nás (rovnako ako v prvom riešení) privedú k dvom riešeniam $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1})$.

b) Z predpokladu $x < 0$ podľa tvrdenia (ii) vyplýva, že všetky čísla $f^i(x)$ sú záporné. Keďže funkcia f je na $(-\infty, 0)$ rastúca a predpoklad $f(x) \neq x$ znamená, že buď $f(x) < x$ alebo $f(x) > x$, v prípade $f(x) < x$ dostaneme postupne $f^2(x) < f(x)$, $f^3(x) < f^2(x)$, atď. až $f^{2n}(x) < f^{2n-1}(x)$, teda spolu

$$x > f(x) > f^2(x) > f^3(x) > \ldots > f^{2n}(x),$$

zatiaľ čo v prípade $f(x) > x$ dostaneme podobne

$$x < f(x) < f^2(x) < f^3(x) < \ldots < f^{2n}(x).$$

V oboch prípadoch sme sa dostali ku sporu s rovnosťou $f^{2n}(x) = x$, takže v prípade b) žiadne riešenie poslednej rovnice neexistuje.

c) Z predpokladu $x > 0$ podľa tvrdenia (i) vyplýva, že všetky čísla $f^i(x)$ sú nezáporné. Keďže funkcia f je na intervale $\langle 0, \infty)$ klesajúca, je predpoklad $f(x) \neq x$ na odvodenie záverov podobných tým z prípadu b) nedostačujúci, budeme k nim potrebovať porovnanie čísel $f^2(x)$ a x, rozlíšime preto tri možnosti $f^2(x) < x$, $f^2(x) = x$ a $f^2(x) > x$.

Ak $f^2(x) < x$, dostávame postupne $f^3(x) > f(x)$, $f^4(x) < f^2(x)$, atď. až dôjdeme k spornému záveru, že

$$x > f^2(x) > f^4(x) > \ldots > f^{2n}(x).$$

Podobne z $f^2(x) > x$ odvodíme sporný záver

$$x < f^2(x) < f^4(x) < \ldots < f^{2n}(x).$$

Ostáva tak jediná možnosť, že $f^2(x) = x$.[1] Mnohočlen

$$f^2(x) - x = k - (k - x^2)^2 - x$$

je síce štvrtého stupňa, pomôže nám však, že poznáme dva z jeho koreňov: ak totiž platí $f(x) = x$, platí aj $f^2(x) = x$. Keďže korene mnohočlena $f(x) - x = k - x^2 - x$, t. j. čísla $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1})$, sú pre ľubovoľné $k \in \langle 0, 1\rangle$ reálne a navzájom rôzne (lebo $x_1 \geqq 0 > x_2$), prichádzame k záveru, že mnohočlen $f^2(x) - x$ musí byť násobkom mnohočlena $f(x) - x$. Rutinným vydelením získame potrebný rozklad

$$\underbrace{k - (k - x^2)^2 - x}_{f^2(x)-x} = \underbrace{(k - x^2 - x)}_{f(x)-x}(x^2 - x + 1 - k).$$

Prípadné nezáporné korene rovnice $f^2(x) = x$ (rôzne od x_1) teda nájdeme riešením kvadratickej rovnice $x^2 - x + 1 - k = 0$. Sú to čísla $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4k-3})$, a to iba v prípade, keď $3/4 < k \leqq 1$ – pozri diskusiu v prvom riešení, ktorú tu vynecháme. To sú aj jediné riešenia rovnice $f^{2n}(x) = x$ v prípade c).

Zhrnieme výsledky našich úvah: Rovnica $f^{2n}(x) = x$ pre funkciu $f(x) = k - x^2$ s parametrom $k \in \langle 0, 1\rangle$ a daným prirodzeným číslom n má v obore reálnych čísel v prípade $0 \leqq k \leqq 3/4$ práve dve riešenia $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1})$, v prípade $3/4 < < k \leqq 1$ potom riešenia práve štyri – okrem uvedených $x_{1,2}$ ešte $x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4k-3})$. (Množina koreňov je tak nezávislá na stupni $2n$ danej iterácie.[2])

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky hodnoty reálneho parametra p, pre ktoré má rovnica $p(x^2 + x + 4) = 2x$ práve jedno reálne riešenie. [Daná kvadratická rovnica má práve jedno reálne riešenie vtedy, keď je diskriminant rovný nule, čiže keď $(p-2)^2 - 16p^2 = 0$. To nastane pre $p \in \{-2/3, 2/5\}$. Pre $p = 0$ dostaneme lineárnu rovnicu tiež s jedným riešením.]

N2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} ax + y &= 2,\\ x - y &= 2a,\\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

s neznámymi x, y a reálnym parametrom a. [58–B–S–1]

N3. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= z + 1,\\ \sqrt{y^2 + z^2} &= x + 1,\\ \sqrt{z^2 + x^2} &= y + 1. \end{aligned}$$

[60–B–I–1]

[1] Zdôraznime, že sme sa v tomto okamihu „zbavili“ prirodzeného čísla n. Dokázali sme totiž, že každé nezáporné riešenie rovnice $f^{2n}(x) = x$ musí byť riešením rovnice $f^2(x) = x$ (ak nie je dokonca samo riešením rovnice $f(x) = x$).

[2] Dodajme, že podanú metódu riešenia nemožno uplatniť na rovnicu $f^n(x) = x$, keď je n nepárne číslo väčšie ako 1 – vtedy zlyháva podaný rozbor prípadu c). Numerické výpočty ukazujú, že také rovnice majú okrem koreňov $x_{1,2}$ ďalšie kladné korene, ktoré závisia od hodnoty n.

N4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sqrt{x^2-y}=z-1,$$
$$\sqrt{y^2-z}=x-1,$$
$$\sqrt{z^2-x}=y-1.$$

[59–A–I–1]

N5. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\sqrt{x-y^2}=z-1,$$
$$\sqrt{y-z^2}=x-1,$$
$$\sqrt{z-x^2}=y-1.$$

[59–A–S–1]

N6. Určte všetky trojice (a,b,c) kladných reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$a\sqrt{b}-c=a,$$
$$b\sqrt{c}-a=b,$$
$$c\sqrt{a}-b=c.$$

[59–CPS–1]

N7. Vyriešte sústavu rovníc $k+x^2=y$, $k+y^2=x$ s reálnym parametrom k. [Rovnice od seba odčítajte, výslednú rovnosť upravte na súčinový tvar $(x-y)(x+y+1)=0$ a rozlíšte, ktorý z činiteľov je nulový. Pri zhrňovaní výsledkov nezabudnite, že pre niektoré k môžu byť oba činitele nulové.]

D1. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$x+y=1,$$
$$x-y=a,$$
$$-4ax+4y=z^2+4$$

s neznámymi x, y, z a reálnym parametrom a. [58–B–II–1]

D2. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$a(b^2+c)=c(c+ab),$$
$$b(c^2+a)=a(a+bc),$$
$$c(a^2+b)=b(b+ca).$$

[64–A–III–4]

D3. Určte všetky trojice (x,y,z) kladných reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$2x^3=2y(x^2+1)-(z^2+1),$$
$$2y^4=3z(y^2+1)-2(x^2+1),$$
$$2z^5=4x(z^2+1)-3(y^2+1).$$

[57–CPS–1]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Ján Mazák, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016