66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

---

1. *Zistite, aké najmenšie kladné celé číslo možno vložiť medzi dvojčíslia* 20 *a* 16 *tak, aby výsledné číslo bolo násobkom čísla* 2016. (*Radek Horenský*)

Riešenie. Číslo 2 016 je násobkom 9, preto výsledné číslo musí mať ciferný súčet deliteľný 9. To nastane práve vtedy, keď aj vložené číslo bude mať ciferný súčet deliteľný 9, čiže to bude násobok deviatich. Vyskúšame postupne kladné násobky čísla 9 od najmenšieho: čísla 9, 18, 27 nevyhovujú (namiesto priameho delenia číslom 2 016 sa stačí presvedčiť, že čísla 20 916, 201 816 ani 202 716 nie sú – podľa svojich posledných štvorčíslí – deliteľné číslom 16, zato číslo 2 016 áno), ale 203 616 = 2 016 · 101. Hľadaným najmenším číslom je teda 36.

Poznámka. Keďže 2 016 je násobkom šestnástich, možno postupné hľadanie najmenšieho vyhovujúceho čísla založiť tiež na nasledujúcom zrejmom poznatku: číslo s posledným dvojčíslím 16 (t. j. číslo tvaru $100k + 16$) je deliteľné šestnástimi práve vtedy, keď je jeho predposledné dvojčíslie (teda posledné dvojčíslie príslušného k) deliteľné štyrmi.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov (aj v prípade, že neobsahuje úvahy o deliteľnosti číslami 9 ani 16: je možné napr. postupne vkladať čísla $1, 2, \ldots, 36$). Neúplné riešenie: 3 body za zdôvodnenie toho, že vložené číslo musí byť deliteľné deviatimi, resp. štyrmi; 1 bod za overenie, že číslo 36 spĺňa podmienku zo zadania.

---

2. *Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré sa dajú čísla $1, 2, \ldots, n$ rozdeliť do troch disjunktných neprázdnych množín s navzájom rôznymi počtami prvkov tak, že v ľubovoľnej dvojici množín má tá s menším počtom prvkov väčší súčet svojich prvkov.* (*Martin Panák*)

Riešenie. Malé čísla n vylúčime postupne nasledujúcimi úvahami.

Vytvorené tri množiny musia mať navzájom rôzne počty prvkov, a to je možné len pre $n \geqq 1 + 2 + 3 = 6$.

Pre $n = 6$ bude v najmenšej množine iba jeden prvok, preto súčet jej prvkov bude nanajvýš 6. Pritom súčet piatich čísel mimo túto množinu je aspoň 15, takže súčet prvkov niektorej zo zvyšných dvoch množín je aspoň 8, teda väčší ako číslo z jednoprvkovej množiny, čo odporuje požiadavkám úlohy. Podobnou úvahou vylúčime aj čísla $n = 7$ a $n = 8$, pre ktoré tiež jedno číslo musí tvoriť celú jednu množinu.

Pre $n = 9$ je hľadané rozdelenie napr. $\{9, 8\}$, $\{7, 6, 3\}$, $\{5, 4, 2, 1\}$.

Pre $n = 10$ musia byť v najmenšej množine dva prvky, ich súčet je nanajvýš 19. Pritom súčet ostatných čísel je 36, a keďže súčty prvkov zvyšných dvoch množín nie sú rovnaké, musí jeden z nich byť aspoň 19, čo dáva spor. Podobne odvodíme spor aj pre $n = 11$.

Teraz opíšeme vyhovujúce rozdelenie pre každé číslo $n \geqq 12$, ktoré podľa delenia tromi so zvyškom zapíšeme v tvare $n = 3k + r$, pričom $k \geqq 4$ a $r \in \{0, 1, 2\}$. Počty prvkov troch množín zvolíme v rastúcom poradí $k - 1$, k a $k + r + 1$, pričom do prvej množiny M_1 zaradíme $k - 1$ najväčších čísel z $\{1, 2, \ldots, n\}$ (teda čísla od $n - k + 2$ po n vrátane), druhú množinu M_2 potom zostavíme z k predchádzajúcich najväčších čísel (teda z čísel od $n - 2k + 2$ po $n - k + 1$) a zvyšných $k + r + 1$ najmenších čísel napokon vytvorí množinu M_3.

Keďže všetky čísla z M_1 sú väčšie ako všetky čísla z množiny M_2, ktorá má iba o 1 prvok menej ako M_1, stačí ukázať, že súčet troch najväčších čísel z M_1 je väčší ako súčet štyroch najmenších čísel z M_2, a bude jasné, že taká nerovnosť platí aj pre súčty všetkých čísel z M_1 a M_2. Spomenuté tri a štyri čísla naozaj existujú (lebo $k \geqq 4$) a potrebná nerovnosť $n + (n-1) + (n-2) > (n-2k+2) + (n-2k+3) + (n-2k+4) + (n-2k+5)$ je ekvivalentná nerovnosti $8k - n > 17$, ktorá po dosadení $n = 3k + r$ prejde na nerovnosť $5k > 17 + r$. Tá platí, lebo $5k \geqq 20$ a $17 + r \leqq 19$. Podobne vysvetlíme, že množina M_2 má väčší súčet prvkov ako množina M_3, ktorá má oproti M_2 o $r+1$ prvkov viac: dve najväčšie čísla v M_2 majú určite súčet väčší ako $r+3$ najmenších čísel v M_3, lebo $(n-k+1) + (n-k) = 2(3k+r-k) + 1 = 4k + 2r + 1 \geqq 17 > 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Úlohe vyhovujú všetky celé čísla $n \geqq 12$ a $n = 9$.

Iné riešenie. Ukážeme, ako vylúčiť malé nevyhovujúce čísla n všeobecnejšou úvahou. Predpokladajme teda, že pre nejaké kladné celé číslo n požadované rozdelenie existuje. Označme jednotlivé množiny M_1, M_2 a M_3 v poradí podľa ich rastúcej mohutnosti. Ak označíme p počet prvkov v množine M_1, ktorá má súčet prvkov najväčší, bude platiť $p + (p+1) + (p+2) \leqq n$, teda

$$p \leqq \frac{n}{3} - 1. \tag{1}$$

Druhú dôležitú nerovnosť získame pozorovaním, že súčet s_1 prvkov v M_1 je nanajvýš $n + (n-1) + \ldots + (n-p+1) = \frac{1}{2}p(2n-p+1)$ a zároveň musí byť väčší ako súčty prvkov s_2 a s_3 vo zvyšných dvoch množinách. Vzhľadom na celočíselnosť týchto troch súčtov dostávame

$$1 + 2 + \ldots + n = s_1 + s_2 + s_3 \leqq s_1 + (s_1 - 1) + (s_1 - 2) = 3s_1 - 3,$$

teda $\frac{1}{6}n(n+1) + 1 \leqq s_1$. Porovnaním oboch odhadov pre s_1 dostaneme nerovnosť

$$\tfrac{1}{6}n(n+1) + 1 \leqq \tfrac{1}{2}p(2n-p+1),$$

čiže

$$n^2 + n(1-6p) + 3p^2 - 3p + 6 \leqq 0. \tag{2}$$

Ak je $p = 1$, platí podľa (1) $n \geqq 6$ a (2) sa redukuje na nerovnosť $n^2 - 5n + 6 \leqq 0$, ktorá však pre žiadne $n \geqq 6$ neplatí.

Ak je $p = 2$, platí podľa (1) $n \geqq 9$ a (2) sa redukuje na nerovnosť $n^2 - 11n + 12 \leqq 0$, ktorá neplatí pre žiadne $n \geqq 10$. Prípad $p = 2$ je tak možný jedine pre $n = 9$, ktoré skutočne vyhovuje (pozri pôvodné riešenie). Pre ďalšie vyhovujúce n preto musí byť $p \geqq 3$, teda podľa (1) $n \geqq 12$.

Teraz iným spôsobom ukážeme, že množiny M_1, M_2, M_3 zostrojené v pôvodnom riešení pre každé $n \geqq 12$ vyhovujú, a to priamym vyjadrením prislúchajúcich rozdielov $s_1 - s_2$ a $s_2 - s_3$, o ktorých máme ukázať, že sú oba kladné. Využijeme na to opäť vyjadrenie $n = 3k + r$ a prvky navrhnutých množín zapíšeme do riadkov v *klesajúcom* poradí:

$$\begin{array}{lcccccc}
M_1\colon & 3k+r & 3k+r-1 & \ldots & 2k+r+2 & & \\
M_2\colon & 2k+r+1 & 2k+r & \ldots & k+r+3 & k+r+2 & \\
M_3\colon & k+r+1 & k+r & \ldots & r+3 & r+2 & r+1 \quad \ldots
\end{array}$$

(Tri bodky v poslednom riadku znamenajú čísla $r, \ldots, 1$ v prípade $r > 0$.)

Všimnime si, že pod sebou zapísané prvky množín M_1 a M_2 majú ten istý rozdiel, rovný číslu $k-1$. Takých dvojíc je $k-1$, pritom v množine M_2 je „navyše“ posledné (k-te) číslo $k+r+2$. To vedie k prvému zo vzorcov

$$s_1 - s_2 = (k-1)^2 - (k+r+2), \quad s_2 - s_3 = k^2 - \sum_{j=1}^{r+1} j,$$

druhý vzorec sa dokáže podobnou úvahou o prvkoch množín M_2 a M_3, tiež zapísaných pod sebou. Že sú oba získané rozdiely za predpokladov $k \geqq 4$ a $r \in \{0,1,2\}$ kladné, je zrejmé:

$$s_1 - s_2 \geqq (k-1)^2 - (k+4) = k(k-3) - 3 \geqq 4 \cdot 1 - 3 = 1,$$
$$s_2 - s_3 \geqq k^2 - (1+2+3) \geqq 4^2 - 6 = 10.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov rozdelených takto:
2 body za dôkaz neexistencie rozdelenia pre $n < 12$, $n \neq 9$ (ak dôkaz pre niektoré n chýba, dajte za túto časť nanajvýš 1 bod; ak riešiteľ vylúči iba prípady $n < 6$, tak 0 bodov);
1 bod za dôkaz existencie vhodného rozdelenia pre $n = 9$;
3 body za dôkaz existencie vhodného rozdelenia pre $n \geqq 12$ (v neúplnom riešení nanajvýš 1 bod za popis vyhovujúceho rozdelenia, ak chýba zdôvodnenie správnosti).

---

3. *Body D a E sú (v tomto poradí) pätami výšok z vrcholov B a C ostrouhlého trojuholníka ABC. Predpokladajme, že platí $|AE| \cdot |AD| = |BE| \cdot |CD|$. Akú najmenšiu veľkosť môže mať uhol BAC?* (*Patrik Bak*)

Riešenie. Po dosadení dĺžok úsekov AE, AD, BE, CD vyjadrených pomocou dĺžok b a c strán trojuholníka ABC a kosínusu uhla $\alpha = |\measuredangle BAC|$ do rovnosti zo zadania dostaneme

$$b\cos\alpha \cdot c\cos\alpha = (c - b\cos\alpha)(b - c\cos\alpha),$$

čiže $bc = (b^2+c^2)\cos\alpha$. Odtiaľ

$$\cos\alpha = \frac{bc}{b^2+c^2} \leqq \frac{1}{2},$$

pričom posledná nerovnosť je pre ľubovoľné kladné čísla b a c ekvivalentná zrejmej nerovnosti $(b-c)^2 \geqq 0$ (možno sa tiež odvolať na AG-nerovnosť pre dvojicu čísel b^2 a c^2). Dokázali sme tak, že pre uhol α ľubovoľného trojuholníka ABC vyhovujúceho zadaniu úlohy platí $\cos\alpha \leqq 1/2$, čiže $\alpha \geqq 60°$. Keďže k týmto vyhovujúcim trojuholníkom zrejme patrí aj každý rovnostranný trojuholník (v ktorom sú totiž AE, AD, BE, CD štyri zhodné úsečky), je $\alpha = 60°$ hľadané minimum.

Iné riešenie. Označme dĺžky úsekov AE, EB, AD, DC postupne p, q, r, s. Podľa predpokladu zo zadania platí $pr = qs$. Z mocnosti bodu A k Tálesovej kružnici nad priemerom BC, ktorá prechádza bodmi D a E, pre dĺžky týchto úsekov dostaneme

$$p(p+q) = r(r+s).$$

Po vyjadrení $s = pr/q$ z prvého vzťahu, dosadení do druhého a po zjednodušení dostaneme $pq = r^2$. Označme S stred strany AB a c jej dĺžku. Platí

$$r^2 = pq = |AE| \cdot |BE| = \left(\frac{c}{2} + |SE|\right)\left(\frac{c}{2} - |SE|\right) = \frac{c^2}{4} - |SE|^2,$$

preto $r^2 \leqq c^2/4$ čiže $r/c \leqq 1/2$. Podiel $r/c = |AD|/|AB|$ je však z pravouhlého trojuholníka ABD rovný kosínusu skúmaného uhla BAC, takže sme odvodili rovnakú nerovnosť ako v prvom riešení, ktorého záver už opakovať nebudeme.

Iné riešenie. Ešte jedným, trochu prácnejším algebraickým výpočtom odvodíme kľúčovú nerovnosť $\cos\alpha \leqq 1/2$ pre uhol $\alpha = |\measuredangle BAC|$ každého trojuholníka ABC vyhovujúceho zadaniu úlohy. Vyjadríme všeobecne dĺžky úsekov AE, AD, BE, CD pomocou dĺžok strán trojuholníka ABC (štandardne označených a, b, c). Vďaka kosínusovej vete platí

$$|AE| = |AC| \cdot \cos\alpha = b \cdot \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc} = \frac{c^2+b^2-a^2}{2c}$$

a analogicky tiež

$$|AD| = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}, \qquad |BE| = \frac{c^2+a^2-b^2}{2c}, \qquad |CD| = \frac{b^2+a^2-c^2}{2b}.$$

Dosadením získaných rovností do vzťahu zo zadania a jeho následným vynásobením spoločným menovateľom $4bc$ dostaneme polynomickú rovnosť, ktorú teraz zapíšeme a upravíme:

$$\begin{aligned}\left(b^2+c^2-a^2\right)^2 &= \left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right),\\ a^4+b^4+c^4-2a^2\left(b^2+c^2\right)+2b^2c^2 &= a^4-\left(b^2-c^2\right)^2,\\ 2(b^4+c^4) &= 2a^2(b^2+c^2),\\ a^2 &= \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2}.\end{aligned}$$

Takto určenú hodnotu a^2 dosadíme do už skôr použitého vyjadrenia $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+c^2-\dfrac{b^4+c^4}{b^2+c^2}}{2bc} = \frac{bc}{b^2+c^2} \leqq \frac{1}{2}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 5 bodov za zdôvodnenie $\alpha \geqq 60°$ a 1 bod za výslovnú zmienku o tom, že rovnostranný trojuholník vyhovuje zadaniu. Neúplné riešenie: za odvodenie nerovnosti $\cos\alpha \leqq 1/2$ dávajte 4 body; za odvodenie rovnosti, z ktorej je možné bez ďalších geometrických úvah zhora odhadnúť veľkosť $\cos\alpha$, nanajvýš 2 body (ak tento odhad chýba). Za triviálne použitie kosínusovej vety, z ktorého riešiteľ neodvodil vzťah umožňujúci horný odhad veľkosti uhla α, je 0 bodov.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 16. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016