2016/2017
66. ročník MO *Zadania úloh krajského kola kategórie A*

(*Súťaž sa konala v utorok 10. januára 2017.*)

1. Nájdite všetky trojice celých čísel (a, b, c) také, že každý zo zlomkov

$$\frac{a}{b+c}, \quad \frac{b}{c+a}, \quad \frac{c}{a+b}$$

má celočíselnú hodnotu. (*Jaroslav Švrček*)

2. Daná je kružnica p so stredom K prechádzajúca bodom M a polkružnica q nad priemerom KM. Ľubovoľným bodom L vnútri úsečky KM vedieme kolmicu na KM. Tá pretne polkružnicu q v bode Q a kružnicu p v bodoch P_1, P_2 tak, že $|P_1Q| > |P_2Q|$. Priamka MQ pretína kružnicu p ešte v bode $R \neq M$. Dokážte, že pre obsahy S_1 a S_2 trojuholníkov MP_1Q a P_2RQ platí $1 < S_1 : S_2 < 3 + \sqrt{8}$. (*Šárka Gergelitsová*)

3. V závislosti od reálneho parametra k určte počet riešení sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x^2 + kxy + y^2 &= z, \\ y^2 + kyz + z^2 &= x, \\ z^2 + kzx + x^2 &= y \end{aligned}$$

v obore reálnych čísel. (*Patrik Bak*)

4. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC s výškou AD. Osi uhlov BAD, CAD pretínajú stranu BC postupne v bodoch E, F. Kružnica opísaná trojuholníku AEF pretína strany AB, AC postupne v bodoch G, H. Dokážte, že priamky EH, FG a AD sa pretínajú v jednom bode. (*Patrik Bak*)