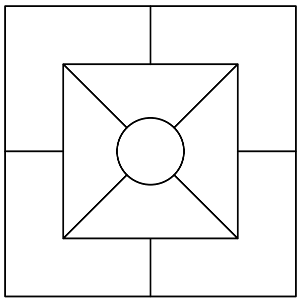
66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

---

1. *Vo všetkých deviatich políčkach útvaru majú byť vyplnené prirodzené čísla tak, aby platilo:*

- *každé z čísel 2, 4, 6 a 8 je použité aspoň raz,*
- *štyri políčka vnútorného štvorca obsahujú súčiny čísel zo susediacich políčok vonkajšieho štvorca,*
- *v kruhu je súčet čísel zo susediacich políčok vnútorného štvorca.*

Zistite, ktoré najmenšie a ktoré najväčšie číslo môže byť napísané v kruhu.



(*Monika Dillingerová*)

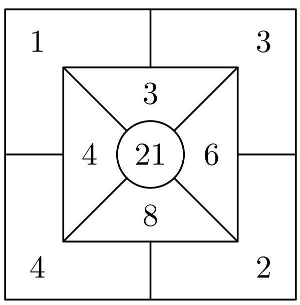
Nápad. Môže byť číslo v kruhu menšie ako 20, resp. väčšie ako 20 000?

Riešenie. Pre dostatočne veľké číslo v niektorom z rohových políčok vonkajšieho štvorca môžu byť zodpovedajúce súčiny vo vnútornom štvorci väčšie ako ľubovoľné vopred zvolené číslo, pričom ľahko dokážeme zabezpečiť, aby každé z čísel 2, 4, 6 a 8 bolo použité. Preto aj súčet v kruhu môže byť ľubovoľne veľký.

Zistíme, aký najmenší súčet môže byť v kruhu. Určite to nemôže byť žiadne z predpísaných čísel: ani to najväčšie z nich (8) totiž nie je väčšie ako súčet zvyšných troch ($2 + 4 + 6 = 12$). Súčet v kruhu preto musí byť väčší alebo rovný súčtu všetkých predpísaných čísel, t. j. $2 + 4 + 6 + 8 = 20$.

Keby súčet v kruhu bol 20, tak by predpísané čísla museli byť v štyroch susediacich políčkach malého štvorca. Keďže jedno z týchto čísel je 6, muselo by byť jedno zo susediacich políčok vonkajšieho štvorca 6 alebo 3, a to by tiež musel byť deliteľ druhého susediaceho políčka vnútorného štvorca. Žiadne z čísel 2, 4 a 8 však takého deliteľa nemá, preto táto možnosť nastať nemôže.

Súčet v kruhu preto musí byť väčší alebo rovný 21. Nasledujúce vyplnenie dokazuje, že najmenšie číslo, ktoré môže byť v kruhu napísané, je 21.



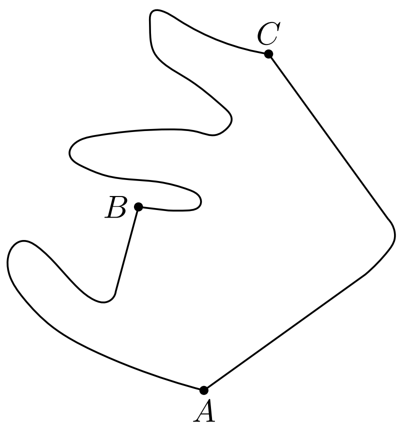
Poznámka. Všimnite si, že číslo v kruhu je vždy súčinom súčtov dvojíc protiľahlých čísel vonkajšieho štvorca. Tento poznatok možno tiež využiť pri riešení úlohy.

---

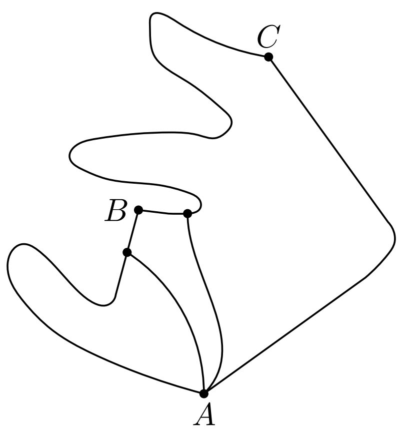
2. *Z bodu A do bodu C vedie náučný chodník prechádzajúci bodom B a inakadiaľ tiež červená turistická značka, pozri obrázok. Okrem toho sa dá použiť aj nezakreslená skratka dlhá 1 500 metrov začínajúca v A a ústiaca na náučnom chodníku. Vojtech zistil, že*

- *výlet z A po červenej do C a po náučnom chodníku späť do A je dlhý 7 700 metrov,*
- *výlet z B po náučnom chodníku do C a potom po červenej do A je dlhý 5 800 metrov,*
- *s využitím skratky je cesta z A do B dlhá 1 700 metrov,*
- *výlet z A po náučnom chodníku do C a späť do A najskôr po náučnom chodníku a potom po skratke je dlhý 8 800 metrov.*

Určte dĺžku náučného chodníka z A do C. Pokiaľ zadanie pripúšťa viac odpovedí, uveďte všetky. (*Libor Šimůnek*)



Skratka mohla ústiť do náučného chodníka buď v úseku medzi A a B, alebo v úseku medzi B a C.



Skratka bola dlhá 1 500 m a s jej využitím bola cesta z A do B (podľa 3. informácie) dlhá 1 700 m. Vzdialenosť B od ústia skratky preto bola v oboch prípadoch rovnaká, a to

$$1\,700 - 1\,500 = 200\,(\mathrm{m}).$$

Z 1. a 2. informácie vyplýva, že cesta z A do B po náučnom chodníku bola dlhá

$$7\,700 - 5\,800 = 1\,900\,(\mathrm{m}).$$

Ak dĺžku úseku náučného chodníka medzi B a C označíme y, tak s využitím 4. informácie dostávame dve rôzne rovnice podľa toho, kam ústi skratka:

a) Pre ústie v úseku medzi A a B platí

$$\begin{aligned} 1\,900 + 2y + 200 + 1\,500 &= 8\,800, \\ 2y &= 5\,200, \\ y &= 2\,600\,(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

V tomto prípade bol celý náučný chodník dlhý

$$1\,900 + 2\,600 = 4\,500\,(\mathrm{m}).$$

b) Pre ústie v úseku medzi B a C platí

$$\begin{aligned} 1\,900 + 2y - 200 + 1\,500 &= 8\,800, \\ 2y &= 5\,600, \\ y &= 2\,800\,(\mathrm{m}). \end{aligned}$$

V tomto prípade bol celý náučný chodník dlhý

$$1\,900 + 2\,800 = 4\,700\,(\mathrm{m}).$$

Poznámka. Ak dĺžku úseku náučného chodníka medzi A a B označíme x, medzi B a ústím skratky z a dĺžku červenej cesty medzi A a C označíme w, tak informácie zo zadania možno zapísať pomocou rovníc takto:

1. $w + y + x = 7\,700$,
2. $y + w = 5\,800$,
3. $1\,500 + z = 1\,700$,
4. $x + 2y + z + 1\,500 = 8\,800$, resp. $x + 2y - z + 1\,500 = 8\,800$.

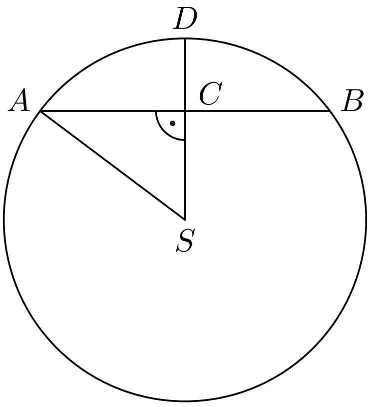
V predchádzajúcom je uvedené postupné riešenie tejto sústavy pre neznáme z, x a y (a následné vyjadrenie súčtu $x + y$). Z druhej rovnice možno vyjadriť aj hodnotu neznámej w.

---

3. *Júlii sa zakotúľala loptička do bazéna a plávala vo vode. Jej najvyšší bod bol 2 cm nad hladinou. Priemer kružnice, ktorú vyznačila hladina vody na povrchu loptičky, bol 8 cm. Určte priemer Júliinej loptičky.* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Aký je vzťah medzi polomerom loptičky, polomerom kružnice vyznačenej hladinou a vzdialenosťou stredu loptičky od hladiny?

Riešenie. Nasledujúci obrázok znázorňuje rez loptičky, ktorý prechádza jej stredom (bod S) a je kolmý na hladinu (priamka AB). Bod C je pätou kolmice z bodu S na hladinu a bod D je najvyšším bodom loptičky nad hladinou.



Zo zadania vieme, že $|AC| = 4\,\mathrm{cm}$ a $|CD| = 2\,\mathrm{cm}$. Polomer loptičky $|SA| = |SD|$ označíme r. Podľa Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku ACS dostávame:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4^2 + (r-2)^2, \\ r^2 &= 16 + r^2 - 4r + 4, \\ 4r &= 20, \\ r &= 5. \end{aligned}$$

Júliina loptička mala priemer $10\,\mathrm{cm}$.

---

4. *Katka si myslela päťciferné prirodzené číslo. Do zošita napísala na prvý riadok súčet mysleného čísla a polovice mysleného čísla. Na druhý riadok napísala súčet mysleného čísla a pätiny mysleného čísla. Na tretí riadok napísala súčet mysleného čísla a devätiny mysleného čísla. Nakoniec sčítala všetky tri zapísané čísla a výsledok napísala na štvrtý riadok. Potom s úžasom zistila, že na štvrtom riadku má zapísanú tretiu mocninu istého prirodzeného čísla. Určte najmenšie číslo, ktoré si Katka mohla myslieť na začiatku.*

(*Lucia Růžičková*)

Ak myslené päťciferné číslo označíme x, tak v prvých troch riadkoch boli napísané čísla $x + \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}x$, $x + \frac{1}{5}x = \frac{6}{5}x$ a $x + \frac{1}{9}x = \frac{10}{9}x$. Súčet v štvrtom riadku bol rovný

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{6}{5} + \frac{10}{9}\right) x = \frac{343}{90} x.$$

Tento výsledok má byť treťou mocninou istého prirodzeného čísla, takže je sám prirodzeným číslom. Keďže čísla 343 a 90 sú nesúdeliteľné, musí byť x násobkom 90. Keďže 343 je treťou mocninou 7, musí byť $\frac{1}{90}x$ treťou mocninou nejakého prirodzeného čísla.

Najmenší násobok 90, ktorý je päťciferný, je $10\,080 = 90 \cdot 112$; preto $\frac{1}{90}x \geqq 112$. Najmenšou treťou mocninou nejakého prirodzeného čísla, ktorá je väčšia alebo rovná 112, je $125 = 5^3$; preto $\frac{1}{90}x = 125$.

Najmenšie číslo, ktoré si Katka mohla myslieť, je $90 \cdot 125 = 11\,250$.

---

5. *Myšky si postavili podzemný domček pozostávajúci z komôrok a tunelčekov:*

- *každý tunelček vedie z komôrky do komôrky (tzn. žiadny nie je slepý),*
- *z každej komôrky vedú práve tri tunelčeky do troch rôznych komôrok,*
- *z každej komôrky sa dá tunelčekmi dostať do ktorejkoľvek inej komôrky,*

- *v domčeku je práve jeden tunelček taký, že jeho zasypaním sa domček rozdelí na dve oddelené časti.*

Koľko najmenej komôrok mohol mať myší domček? Načrtnite, ako mohli byť komôrky pospájané. (*Alžbeta Bohiniková*)

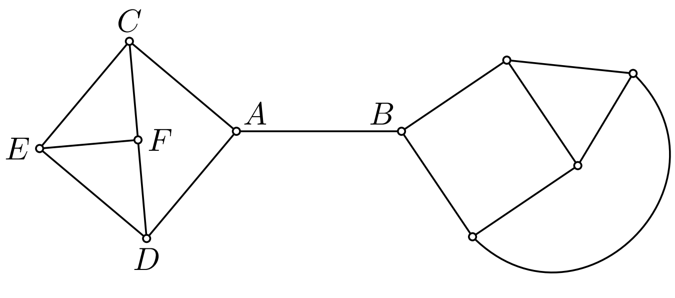
Nápad. Začnite kritickým tunelčekom.

Riešenie. Komôrky budeme označovať krúžkami, tunelčeky čiarami. Začneme kritickým tunelčekom, ktorého zasypaním sa domček rozdelí na dve oddelené časti. Ak komôrky na koncoch tohto tunelčeka označíme A a B, tak každá komôrka patrí do práve jednej z nasledujúcich dvoch skupín:

a) komôrka A a všetky komôrky, do ktorých sa z nej možno dostať bez použitia tunelčeka AB,
b) komôrka B a všetky komôrky, do ktorých sa z nej možno dostať bez použitia tunelčeka BA.

To znamená, že žiadna komôrka z jednej skupiny nie je spojená tunelčekom so žiadnou komôrkou z druhej skupiny. Teraz určíme, koľko najmenej komôrok môže byť v jednej skupine, aby boli splnené ostatné podmienky:

- Aby z komôrky A viedli tri tunelčeky, musia byť v skupine a) aspoň dve ďalšie komôrky, ktoré označíme C a D. Tri komôrky v skupine však nestačia – dajú sa spojiť jedine C a D, a to by z C a D viedli iba dva tunelčeky.
- Preto v skupine a) musí byť aspoň jedna ďalšia komôrka, ktorú označíme E. Štyri komôrky však tiež nestačia – E sa dá spojiť jedine s C a D, a to by z E viedli iba dva tunelčeky.
- Preto v skupine a) musí byť aspoň jedna ďalšia komôrka, ktorú označíme F. Päť komôrok v jednej skupine už stačí – komôrky môžu byť pospájané napr. takto:



Domček mal najmenej 10 komôrok.

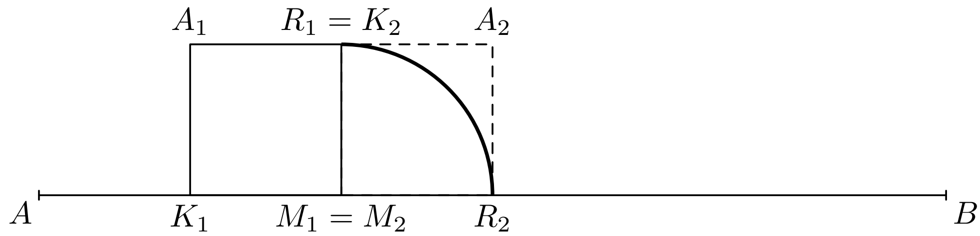
---

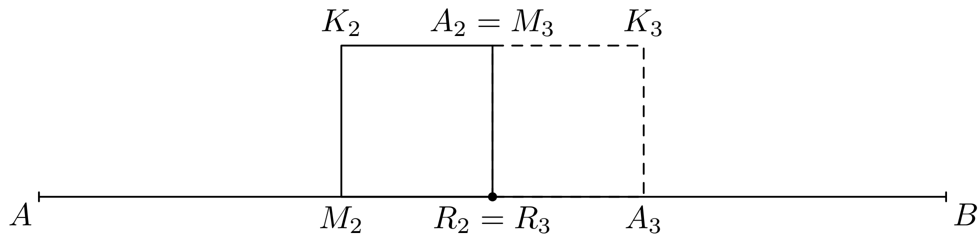
6. *Daná je úsečka AB dĺžky 12 cm, na ktorej je jednou stranou položený štvorec $MRAK$ so stranou dĺžky 2 cm, pozri obrázok. $MRAK$ sa postupne preklápa po úsečke AB, pričom bod R zanecháva na papieri stopu. Narysujte celú stopu bodu R, kým štvorec neobíde úsečku AB z oboch strán a nevráti sa do svojej pôvodnej polohy.*

(*Monika Dillingerová*)

Nápad. Rozdeľte si úlohu na etapy.

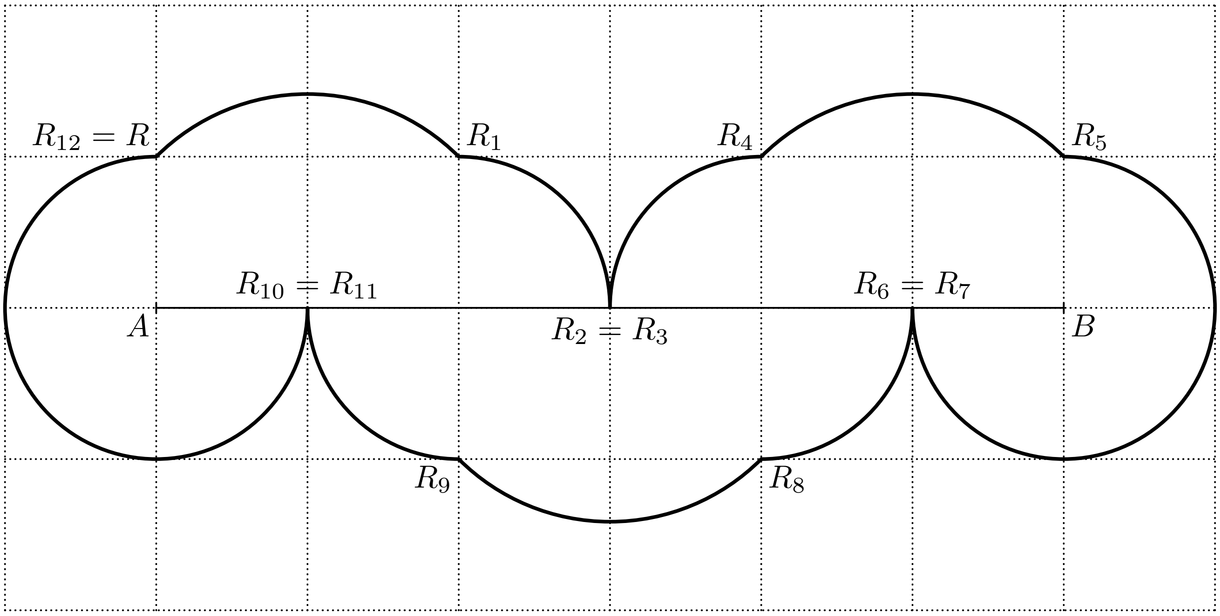
Riešenie. Štvorec sa postupne preklápa okolo bodov na úsečke AB (na nasledujúcich obrázkoch to sú body K, M_1, R_2, A_3, atď.). V každej etape sa bod R pohybuje po časti kružnice, ktorej stred je v niektorom z vyznačených bodov a polomer je rovný buď strane, alebo uhlopriečke štvorca.





Časti kružníc sú väčšinou štvrťkružnice (čo zodpovedá veľkosti vnútorného uhla štvorca), iba v krajných bodoch úsečky to sú trištvrtekružnice (čo zodpovedá veľkosti vonkajšieho uhla štvorca).

Pre narysovanie celej stopy bodu R potrebujeme stredy kružníc ($K = K_1$, $M_1 = M_2$, $R_2 = R_3$ atď.), ktoré sú na úsečke AB po 2 cm. Spoločné body kružníc ($R_1 = K_2$, $R_2 = R_3$, $K_3 = R_4$ atď.) ležia v mrežových bodoch štvorčekovej siete so stranou 2 cm.



Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, Martin Vodička, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Róbert Hajduk, Ján Mazák, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016