**66. ročník Matematickej olympiády**
**2016/2017** *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5*

**1.** *Zvonkohra na nádvorí hrá o každej celej hodine krátku skladbu, a to počínajúc 8. a končiac 22. hodinou. Skladieb je celkom osemnásť, o celej hodine sa hrá vždy iba jedna a po odohraní všetkých osemnástich sa začína v rovnakom poradí znova. Oľga a Ľuboš boli na nádvorí v pondelok o 15. hodine. Ten istý týždeň si prišli zvonkohru vypočuť ešte raz napoludnie, na ich sklamanie však hrala tá istá melódia, ktorú počuli v pondelok. Ktorý deň bola Oľga s Ľubošom na nádvorí druhý raz?* (Libor Šimůnek)

**Nápad.** Koľko z osemnástich skladieb zaznie v jeden deň a na koľko z nich sa nedostane?

**Riešenie.** Medzi odohraním prvej rannej a poslednej večernej skladby uplynie $22 - 8 = 14$ hodín, každý deň sa preto hrá pätnásť skladieb. Vo zvonkohre je nastavených osemnásť skladieb, teda o tri viac.

Na skladbu, ktorú počuli hrdinovia úlohy v pondelok o 15. hodine, sa v utorok dostalo o 3 hodiny neskôr, teda o 18. hodine. V stredu o ďalšie 3 hodiny neskôr, teda o 21. hodine.

Vo štvrtok sledovaná skladba nezaznela vôbec: od posledného jej uvedenia hrala zo sedemnástich ostatných skladieb jedna v stredu o 22. hodine, pätnásť vo štvrtok, jedna v piatok o 8. hodine a na sledovanú skladbu sa dostalo až o 9. hodine.

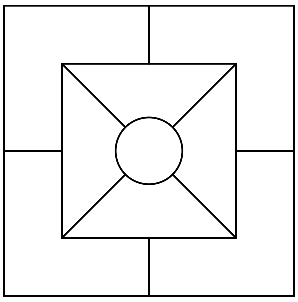
Nasledujúci deň, v sobotu, zaznela sledovaná skladba o 3 hodiny neskôr, teda o 12. hodine. V nedeľu o ďalšie 3 hodiny neskôr, teda o 15. hodine.

Daný týždeň hrala sledovaná skladba napoludnie jedine v sobotu, Oľga a Ľuboš prišli na nádvorie druhý raz v sobotu.

*Poznámka.* Predchádzajúca diskusia môže byť nahradená programom zvonkohry pre daný týždeň. Skladby označujeme číslami 1 až 18, pričom 1 označuje tú, ktorú počuli Oľga s Ľubošom:

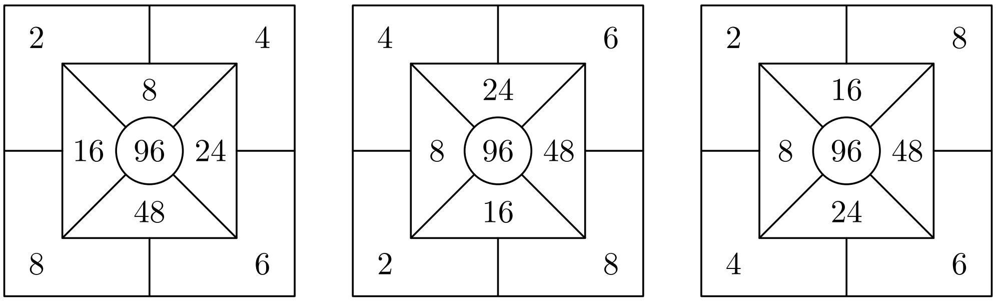
| | 8 h | 9 h | 10 h | 11 h | 12 h | 13 h | 14 h | 15 h | 16 h | 17 h | 18 h | 19 h | 20 h | 21 h | 22 h |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| po | | | | | | | ... | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ut | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 |
| st | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | **1** | 2 |
| št | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| pi | 18 | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| so | 15 | 16 | 17 | 18 | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ne | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | **1** | ... | | | | | | |

**2.** *V každom z rohových políčok vonkajšieho štvorca má byť napísané jedno z čísel 2, 4, 6 a 8, pričom v rôznych políčkach majú byť rôzne čísla. V štyroch políčkach vnútorného štvorca majú byť súčiny čísel zo susediacich políčok vonkajšieho štvorca. V kruhu má byť súčet čísel zo susediacich políčok vnútorného štvorca. Ktoré čísla môžu byť napísané v kruhu? Určte všetky možnosti.* (Monika Dillingerová)



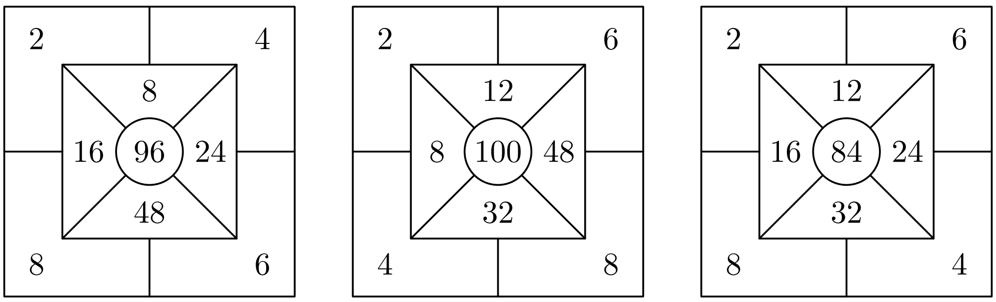
**Nápad.** Môžu rôzne vyplnenia rohových políčok viesť k rovnakému súčtu v kruhu?

**Riešenie.** Čísla 2, 4, 6 a 8 možno do rohových políčok napísať mnohými spôsobmi. Pre rôzne spôsoby však môžeme nakoniec dostať ten istý súčet v kruhu, ako napr. v nasledujúcich prípadoch:




Prvý a druhý prípad sa líšia pootočením o 90°, druhý a tretí sú súmerné podľa vodorovnej osi štvorca a pod. Rôzne hodnoty v kruhu teda dostaneme iba vtedy, keď čísla v rohových políčkach nie sú nijako súmerné.

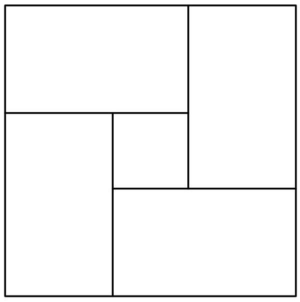
Skúšanie všetkých možností si preto môžeme zjednodušiť tým, že uvažujeme jedno z čísel, napr. 2, v jednom konkrétnom políčku, napr. vľavo hore. Ostatné čísla dopĺňame tak, aby žiadne dve vyplnenia neboli súmerné. Pritom jediná súmernosť, ktorá zachováva 2 v ľavom hornom políčku, je súmernosť podľa uhlopriečky prechádzajúcej týmto políčkom. S týmito požiadavkami máme nasledujúce tri riešenia:




V kruhu môžu byť napísané čísla 84, 96 a 100.

*Poznámka.* Pre každé vyplnenie rohových políčok môžeme nájsť 7 ďalších, ktoré sú s ním nejako súmerné. Všetky vyplnenia teda možno rozdeliť do osmíc, ktoré určite majú rovnaké súčty v kruhu. Pritom čísla do štyroch rohových políčok môžeme vyplniť spolu 24 spôsobmi. V kruhu tak môžu byť napísané nanajvýš $24 : 8 = 3$ rôzne čísla. Skúšaním určíme, ktoré čísla to sú, a že sú navzájom rôzne.

**3.** *Na obrázku je štvorcová dlaždica so stranou dĺžky 10 dm, ktorá je zložená zo štyroch zhodných obdĺžnikov a malého štvorca. Obvod malého štvorca je päťkrát menší ako obvod celej dlaždice. Určte rozmery obdĺžnikov.* (*Karel Pazourek*)



**Nápad.** Určte dĺžku strany malého štvorca.

**Riešenie.** Obvod malého štvorca je päťkrát menší ako obvod dlaždice, preto aj jeho strana je päťkrát menšia ako strana dlaždice. Strana malého štvorca teda meria

$$10 : 5 = 2\,(\mathrm{dm}).$$

Pritom dĺžka strany dlaždice je rovná súčtu dĺžok strany malého štvorca a dvoch kratších strán obdĺžnika. Kratšia strana obdĺžnika teda meria

$$(10 - 2) : 2 = 4\,(\mathrm{dm}).$$

Súčasne dĺžka strany dlaždice je rovná súčtu dĺžok kratšej a dlhšej strany obdĺžnika. Dlhšia strana obdĺžnika teda meria

$$10 - 4 = 6\,(\mathrm{dm}).$$

Rozmery obdĺžnikov sú $4\,\mathrm{dm} \times 6\,\mathrm{dm}$.

**4.** *Predavač vianočných stromčekov predával smriečky po 22 €, borovičky po 25 € a jedličky po 33 €. Ráno mal rovnaký počet smriečkov, jedličiek a borovíc. Večer mal všetky stromčeky predané a celkom za ne utŕžil 3 600 €. Koľko stromčekov v ten deň predavač predal?* (*Marie Krejčová*)

**Nápad.** Počítajte po trojiciach.

**Riešenie.** Trojica smriečok, borovička a jedlička stála dokopy

$$22 + 25 + 33 = 80\,€.$$

Predavač takých trojíc za celý deň predal $3\,600 : 80 = 45$.
Celkom teda predal $3 \cdot 45 = 135$ stromčekov.

**5.** *Napíšte namiesto hviezdičiek cifry tak, aby súčet doplnených cifier bol nepárny a aby platila uvedená rovnosť:*

$$42 \cdot {*}8 = 2{*}{*}{*}$$

(*Libuše Hozová*)

**Nápad.** Začnite od prvej hviezdičky.

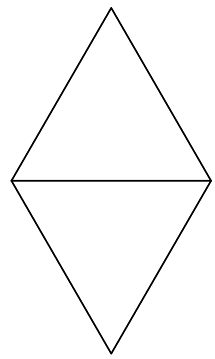
**Riešenie.** Postupne dosadíme všetky možné cifry na mieste prvej hviezdičky, vypočítame súčin a preveríme ostatné požiadavky:

- $42 \cdot 18 = 756$, výsledok je menší ako $2\,000$; nevyhovuje.
- $42 \cdot 28 = 1\,176$, výsledok je menší ako $2\,000$; nevyhovuje.
- $42 \cdot 38 = 1\,596$, výsledok je menší ako $2\,000$; nevyhovuje.
- $42 \cdot 48 = 2\,016$, súčet $4 + 0 + 1 + 6 = 11$ je nepárny; vyhovuje.
- $42 \cdot 58 = 2\,436$, súčet $5 + 4 + 3 + 6 = 18$ je párny; nevyhovuje.
- $42 \cdot 68 = 2\,856$, súčet $6 + 8 + 5 + 6 = 25$ je nepárny; vyhovuje.
- $42 \cdot 78 = 3\,276$, výsledok je väčší ako $2\,999$; nevyhovuje.
- zvyšné dva súčiny sú ešte väčšie; nevyhovujú.

Úloha má dve riešenia, a to

$$42 \cdot 48 = 2\,016 \quad \text{a} \quad 42 \cdot 68 = 2\,856.$$

**6.** *Jarka zostrojila dva zhodné rovnostranné trojuholníky ako na obrázku. Ďalej chce zostrojiť všetky kružnice, ktoré budú mať stred v niektorom z vrcholov a budú prechádzať niektorým iným vrcholom niektorého z trojuholníkov. Zostrojte a spočítajte všetky kružnice vyhovujúce Jarkiným požiadavkám.* (*Karel Pazourek*)

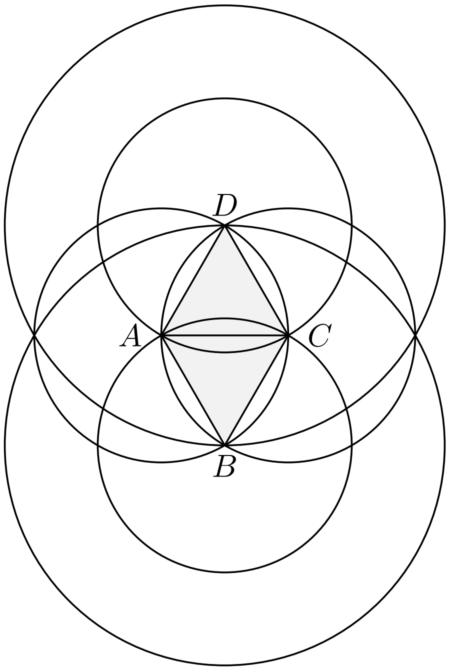


**Nápad.** Začnite s vrcholmi, ktoré sú spoločné obom trojuholníkom.

**Riešenie.** Pomenujme vrcholy ako na nasledujúcom obrázku a všimnime si, že body $A$ a $C$ sú vždy od zvyšných troch bodov rovnako vzdialené (zodpovedajúce úsečky tvoria strany rovnostranných trojuholníkov). Preto kružnica so stredom v bode $A$ prechádzajúca bodom $B$ prechádza aj bodmi $C$ a $D$. Kružnica so stredom v bode $A$ vyhovujúca Jarkiným požiadavkám je teda jediná. Podobne existuje jediná vyhovujúca kružnica so stredom v bode $C$.

Kružnica so stredom v bode $B$ prechádzajúca bodom $A$ prechádza aj bodom $C$, ďalšia kružnica prechádza bodom $D$. Kružnice so stredom v bode $B$ vyhovujúce Jarkiným požiadavkám sú teda dve. Podobne existujú dve vyhovujúce kružnice so stredom v bode $D$.

Spolu existuje šesť vyhovujúcich kružníc:




Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, Martin Vodička, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Róbert Hajduk, Ján Mazák, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016