66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9*

Informácia pre okresnú komisiu MO:

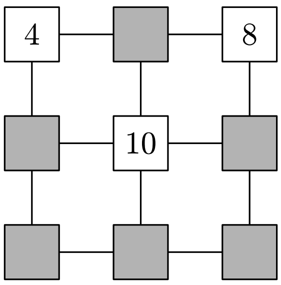
Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení okresných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 20. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšte pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

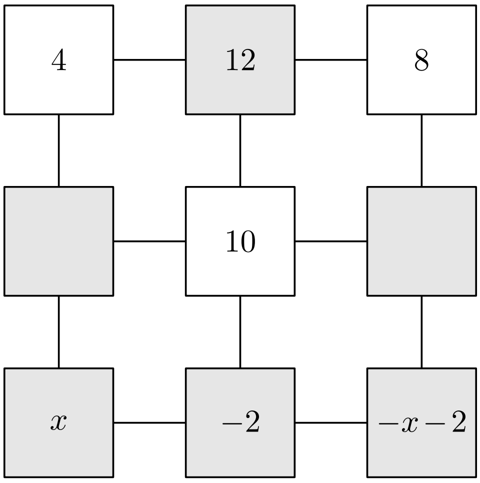
---

1. *Do prázdnych políčok doplňte čísla tak, aby v políčkach uprostred každej vyznačenej úsečky bol súčet čísel z jej krajných políčok a aby súčty čísel z políčok na oboch uhlopriečkach boli rovnaké.* (*Svetlana Bednářová*)



Riešenie. Podľa prvej podmienky vieme doplniť iba prostredné políčko v prvom riadku, $4 + 8 = 12$, a prostredné políčko v treťom riadku, $10 - 12 = -2$.

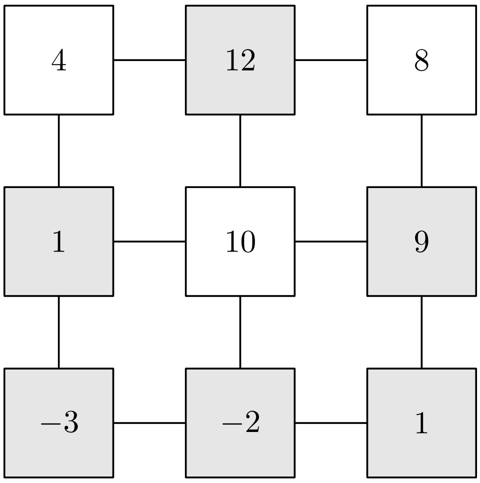
Ďalšie čísla priamo doplniť nevieme, ale môžeme si pomôcť neznámou a rovnicou. Ak napr. číslo v prvom políčku v treťom riadku označíme x, tak podľa prvej podmienky bude v treťom políčku v tom istom riadku $-x - 2$.



Podľa druhej podmienky dostávame

$$
\begin{aligned}
4 + 10 - x - 2 &= 8 + 10 + x,\\
2x &= -6,\\
x &= -3.
\end{aligned}
$$

Po dosadení vieme doplniť aj zvyšné čísla v druhom riadku a dostávame nasledujúce jednoznačné riešenie:



Návrh hodnotenia. Po 1 bode za doplnenie hodnôt 12 a -2; 3 body za zostavenie a vyriešenie rovnice; 1 bod za doplnenie zvyšných čísel.

Riešenie pomocou rovnice nie je nevyhnutné, dá sa odhaliť napr. postupným skúšaním a vysvetlením, že úloha viac riešení nemá. Naopak, označením viacerých čísel z prázdnych políčok neznámymi možno úlohu riešiť pomocou viacerých rovníc o viacerých neznámych. Navrhované hodnotenie prispôsobte žiackemu riešeniu vzhľadom na jeho úplnosť a kvalitu komentára.

---

2. *Pat sčítal všetky štvorciferné čísla, z ktorých každé obsahovalo všetky cifry 1, 2, 3 a 4, a dospel k súčtu 58 126. Mat mu potvrdil, že počítal správne, ale že zabudol pripočítať dve z uvažovaných čísel. Zistite, na ktoré čísla Pat zabudol.* (*Libuše Hozová*)

Riešenie. Všetkých štvorciferných čísel obsahujúcich všetky uvedené cifry je 24:

1 234	1 243	1 324	1 342	1 423	1 432
2 134	2 143	2 314	2 341	2 413	2 431
3 124	3 142	3 214	3 241	3 412	3 421
4 123	4 132	4 213	4 231	4 312	4 321

Medzi týmito 24 číslami sa na každom mieste opakuje každá zo 4 cifier práve 6-krát ($6 \cdot 4 = 24$). Súčet všetkých cifier ako na mieste jednotiek, tak na mieste desiatok, stoviek aj tisícok je rovný
$$6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 60.$$
Súčet všetkých uvedených čísel je preto rovný
$$60 + 10 \cdot 60 + 100 \cdot 60 + 1\,000 \cdot 60 = 66\,660.$$

Keďže Patovi pôvodne vyšlo 58 126, musí byť súčet dvoch chýbajúcich sčítancov rovný
$$66\,660 - 58\,126 = 8\,534.$$
Keďže všetky čísla pozostávajú z cifier menších ako 5, nedochádza pri sčítaní ktorýchkoľvek dvoch nikde k prechodu cez desiatku. Cifry na jednotlivých miestach čísla 8 534 možno preto získať nasledovne:

- $8 = 4 + 4$,
- $5 = 2 + 3$ (možnosť $1 + 4$ vylučujeme, keďže potom by jeden zo sčítancov mal na dvoch miestach 4),
- $3 = 1 + 2$,
- $4 = 1 + 3$ (možnosť $2 + 2$ vylučujeme, keďže potom by jeden zo sčítancov mal na dvoch miestach 2).

Číslo 8 534 možno vyjadriť jedine ako súčet čísel 4 213 a 4 321. A to sú práve čísla, na ktoré Pat pôvodne zabudol.

Návrh hodnotenia. 3 body za určenie správneho súčtu 66 660; 1 bod za určenie rozdielu 8 534; 2 body za určenie pôvodne chýbajúcich čísel 4 213 a 4 321.

Poznámky. Počet všetkých štvorciferných čísel obsahujúcich štyri rôzne cifry je rovný počtu všetkých permutácií štvorprvkovej množiny, a tých je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Celkový správny súčet možno odvodiť aj zoskupovaním vhodných sčítancov: napr. súčet každého čísla s číslom napísaným opačne je vždy 5 555 (napr. $1\,234 + 4\,321 = 5\,555$) a takých dvojíc je zrejme 12; súčet všetkých uvažovaných čísel teda je $12 \cdot 5\,555 = 66\,660$.

---

3. *Vedci púšťali do bludiska potkany a sledovali, či sa dostanú do cieľa. Zistili, že čiernych potkanov došlo do cieľa 56 %, bielych 84 %. V cieli bol pomer počtu čiernych a bielych potkanov* $1 : 2$. *Aký bol pomer počtu čiernych a bielych potkanov na štarte?*

(*Michaela Petrová*)

Riešenie. Počet čiernych potkanov na štarte označíme x, počet bielych potkanov na štarte označíme y. Do cieľa tak došlo $0{,}56x$ čiernych potkanov a $0{,}84y$ bielych potkanov a podľa zadania je $0{,}56x : 0{,}84y = 1 : 2$. Potrebujeme zistiť pomer $x : y$.

Predchádzajúcu rovnosť môžeme zapísať ako

$$\frac{0{,}56x}{0{,}84y} = \frac{1}{2},$$

čo je ekvivalentné s

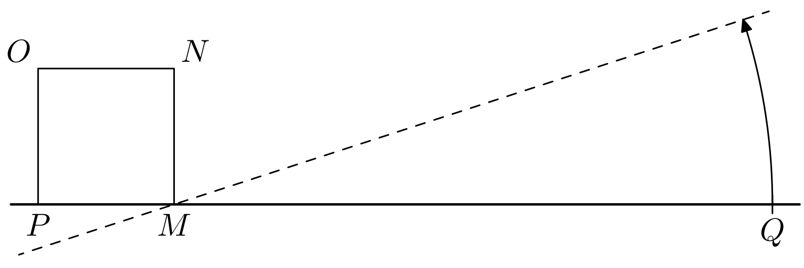
$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{84}{56} = \frac{42}{56} = \frac{3}{4}.$$

Pomer čiernych a bielych potkanov na štarte bol 3 : 4.

Návrh hodnotenia. 3 body za odvodenie úvodnej rovnosti alebo podobného vzťahu; 3 body za vyjadrenie pomeru $x : y$.

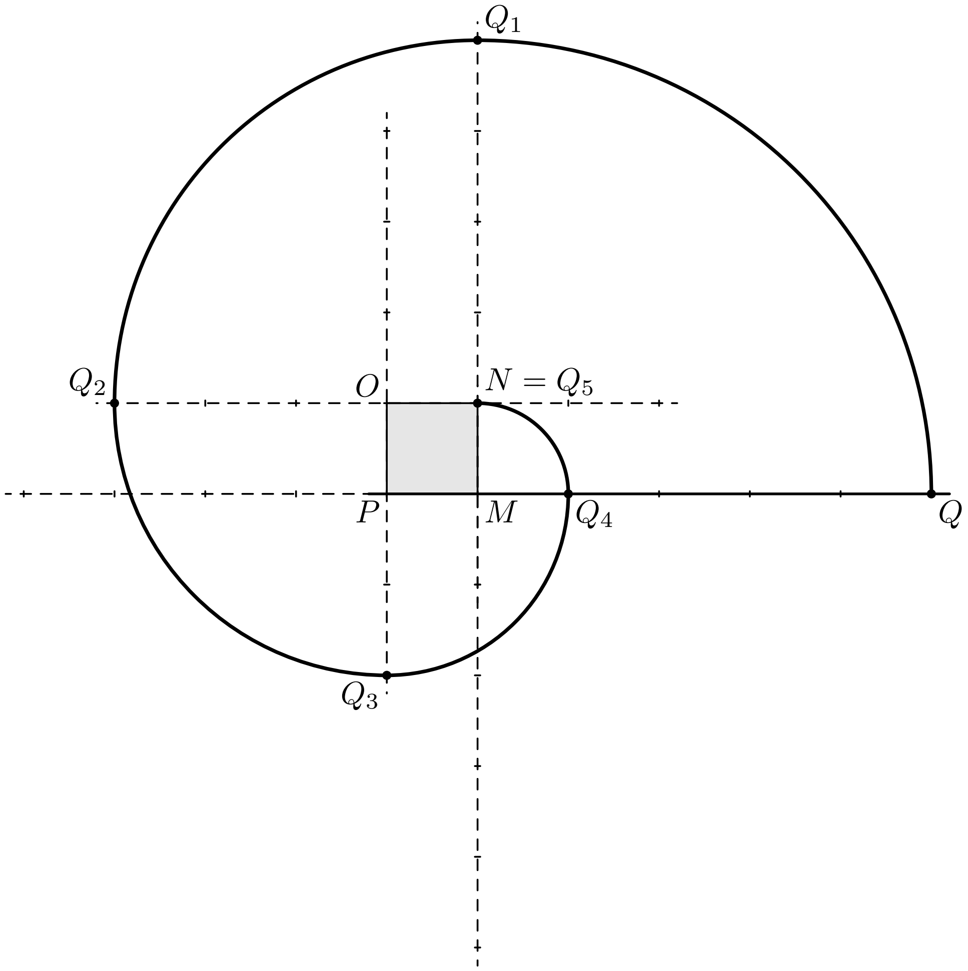
---

4. *Na úsečke PQ je jednou stranou položený štvorec $MNOP$, pozri obrázok. Priamka PQ sa postupne preklápa po stranách štvorca $MNOP$, pričom bod Q zanecháva na papieri stopu. Po prvom preklopení je táto stopa dlhá 5 cm, po piatich preklopeniach bod Q splynie s jedným z vrcholov štvorca. Určte dĺžku celej stopy bodu Q.*



(*Vojtěch Žádník*)

Riešenie. Pri každom preklopení opisuje bod Q štvrťkružnicu so stredom v niektorom z vrcholov štvorca a s polomerom, ktorý sa postupne zmenšuje o dĺžku strany štvorca. Aby bod Q po piatich preklopeniach splynul s niektorým vrcholom štvorca, musí byť úsečka MQ päťnásobkom strany štvorca.



Dĺžky štvrťkružníc sú v rovnakých pomeroch ako ich polomery. Pritom polomery všetkých štvrťkružníc sú celočíselnými násobkami polomeru najmenšej (piatej) štvrťkružnice. Ak jej dĺžku označíme d, tak súčet dĺžok všetkých piatich štvrťkružníc je

$$d + 2d + 3d + 4d + 5d = 15d, \tag{1}$$

čo je trojnásobok dĺžky najväčšej (prvej) štvrťkružnice. Zo zadania vieme, že prvá štvrťkružnice je dlhá 5 cm. Súčet (1), teda dĺžka stopy opísanej bodom Q, je

$$3 \cdot 5 = 15\,(\mathrm{cm}).$$

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie MQ ako pätnásobku strany štvorca; 2 body za vyjadrenie súčtu (1); 2 body za doriešenie a vyjadrenie v cm.

Poznámka. Vyjadrenie d pomocou dĺžky strany štvorca, ozn. a, je $d = \frac{1}{2}\pi a$. Súčet (1) potom môže byť napísaný takto:

$$\frac{1}{2}\pi a \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \frac{15}{2}\pi a = 3 \cdot \frac{5}{2}\pi a.$$

Na určenie súčtu v cm nepotrebujeme poznať ani a, ani d.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017