66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

1. *Dokážte, že pre ľubovoľné reálne číslo a platí nerovnosť*

$$a^2 + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geqq a + 1.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Zadaná nerovnosť patrí do veľkej skupiny nerovností, ktoré možno dokazovať (často opakovaným) využitím poznatku, že druhá mocnina akéhokoľvek reálneho čísla je nezáporná. Na jeho základe overíme najskôr, že menovateľ $a^2 - a + 1$ zlomku, ktorý je v danej nerovnosti zastúpený, je vždy kladný. Po úprave dvojčlena $a^2 - a$, ktorej hovoríme *doplnenie na štvorec*, totiž dostaneme

$$a^2 - a + 1 = \left(a^2 - a + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqq \frac{3}{4} > 0.$$

Menovateľ $a^2 - a + 1$ je teda kladný, a keď ním obe strany dokazovanej nerovnosti vynásobíme, dostaneme ekvivalentnú nerovnosť

$$a^2(a^2 - a + 1) + 1 \geqq (a + 1)(a^2 - a + 1).$$

Po roznásobení a zlúčení rovnakých mocnín a dôjdeme k nerovnosti

$$a^4 - 2a^3 + a^2 \geqq 0,$$

ktorá však platí, pretože jej ľavá strana má rozklad $a^2(a - 1)^2$ s nezápornými činiteľmi a^2 a $(a - 1)^2$ – opäť účinkuje poznatok spomenutý v úvode riešenia. Tým je pôvodná nerovnosť pre každé reálne číslo a dokázaná.

Zároveň sme zistili, že rovnosť vo výslednej, a teda aj v pôvodnej nerovnosti nastane práve vtedy, keď platí $a^2(a - 1)^2 = 0$, teda jedine vtedy, keď $a = 0$ alebo $a = 1$.

Iné riešenie. Danú nerovnosť môžeme prepísať na tvar

$$(a^2 - a + 1) + \frac{1}{a^2 - a + 1} \geqq 2, \quad \text{čiže} \quad u + \frac{1}{u} \geqq 2,$$

pričom $u = a^2 - a + 1$. Je dobre známe, že posledná nerovnosť platí pre každé *kladné* reálne číslo u a že prechádza v rovnosť jedine pre $u = 1$. Vyplýva to (opäť v dôsledku nezápornosti každej druhej mocniny) buď priamo z vyjadrenia

$$u + \frac{1}{u} = \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)^2 + 2,$$

alebo voľbou $x = u$ a $y = 1/u$ vo všeobecnejšej preslávenej nerovnosti $\frac{1}{2}(x + y) \geqq \sqrt{xy}$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom ľubovoľných dvoch *nezáporných* čísel x a y, ktorá sama je dôsledkom obdobného vyjadrenia rozdielu oboch dotyčných priemerov

$$\tfrac{1}{2}(x + y) - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geqq 0.$$

Tak či onak stačí na dôkaz pôvodnej nerovnosti overiť, že výraz $u = a^2 - a + 1$ je kladný pre každé reálne číslo a. To možno spraviť rovnako ako v prvom riešení, alebo prepísať nerovnosť $a^2 - a + 1 > 0$ na tvar

$$a(a-1) > -1$$

a spraviť krátku diskusiu: Posledná nerovnosť platí ako pre každé $a \geqq 1$, tak pre každé $a \leqq 0$, lebo v oboch prípadoch máme dokonca $a(a-1) \geqq 0$; pre zvyšné hodnoty a, teda pre $a \in (0,1)$, je súčin $a(a-1)$ síce záporný, avšak určite väčší ako -1, pretože oba činitele a, $a-1$ majú absolútnu hodnotu menšiu ako 1. Prepísaná nerovnosť je tak dokázaná pre každé reálne číslo a, a tým je podmienka pre použitie nerovnosti $u + 1/u \geqq 2$ pre $u = a^2 + a + 1$ overená.

Ako sme už uviedli, rovnosť $u + 1/u = 2$ nastane jedine pre $u = 1$. Pre rovnosť v nerovnosti zo zadania úlohy tak dostávame podmienku $a^2 - a + 1 = 1$, čiže $a(a-1) = 0$, čo je splnené iba pre $a = 0$ a pre $a = 1$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla x, y a z platia nerovnosti
a) $2xyz \leqq x^2 + y^2z^2$, b) $(x^2 - y^2)^2 \geqq 4xy(x-y)^2$.
[a) $P - L = (x - yz)^2$, b) $L - P = (x-y)^4$]

N2. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b platí nerovnosť $a/b^2 + b/a^2 \geqq 1/a + 1/b$. [Vynásobte a^2b^2, vydeľte $a + b$ a upravte na $(a-b)^2 \geqq 0$.]

D1. Použitím nerovnosti $u + 1/u \geqq 2$ ($\forall u > 0$) dokážte, že pre ľubovoľné kladné číslo a platí
a) $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$, b) $\dfrac{2a^2+1}{\sqrt{4a^2+1}} > 1$.
[Voľte $u = \sqrt{a^2+2}$ v prípade a), $u = \sqrt{4a^2+1}$ v prípade b) a v oboch prípadoch využite, že $u \neq 1$.]

D2. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné čísla a, b, c, d platí

$$(ab + cd)\left(\frac{1}{ac} + \frac{1}{bd}\right) \geqq 4.$$

[$L = (b/c + c/b) + (a/d + d/a) \geqq 2 + 2 = 4$]

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné čísla a, b z intervalu $\langle 1, \infty)$ platí nerovnosť

$$(a^2+1)(b^2+1) - (a-1)^2(b-1)^2 \geqq 4$$

a zistite, kedy nastane rovnosť. [59–C–II–2]

D4. Nájdite všetky reálne čísla x a y, pre ktoré výraz $2x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4$ nadobúda svoju najmenšiu hodnotu. [65–C–I–3, časť a)]

---

2. *Nájdite najväčšie prirodzené číslo d, ktoré má tú vlastnosť, že pre ľubovoľné prirodzené číslo n je hodnota výrazu*

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$$

deliteľná číslom d. (*Aleš Kobza*)

Riešenie. Vypočítajme najskôr hodnoty $V(n)$ pre niekoľko najmenších prirodzených čísel n a ich rozklady na súčin prvočísel zapíšme do tabuľky:

n	$V(n)$
1	0
2	$48 = 2^4 \cdot 3$
3	$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$
4	$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Z toho vidíme, že hľadaný deliteľ d všetkých čísel $V(n)$ musí byť deliteľom čísla $2^2 \cdot 3 = 12$, spĺňa teda nerovnosť $d \leqq 12$. Preto ak ukážeme, že číslo $d = 12$ zadaniu vyhovuje, t. j. že $V(n)$ je násobkom čísla 12 pre *každé* prirodzené n, budeme s riešením hotoví.

Úprava

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (12n^2 - 12) + (n^4 - n^2),$$

pri ktorej sme z výrazu $V(n)$ „vyčlenili" dvojčlen $12n^2 - 12$, ktorý je zrejmým násobkom čísla 12, redukuje našu úlohu na overenie deliteľnosti číslom 12 (teda deliteľnosti číslami 3 a 4) dvojčlena $n^4 - n^2$. Využijeme na to jeho rozklad

$$n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = (n - 1)n^2(n + 1).$$

Pre každé celé n je tak výraz $n^4 - n^2$ určite deliteľný tromi (také je totiž jedno z troch po sebe idúcich celých čísel $n - 1$, n, $n + 1$) a súčasne aj deliteľný štyrmi (zaručuje to v prípade párneho n činiteľ n^2, v prípade nepárneho n dva párne činitele $n - 1$ a $n + 1$).

Dodajme, že deliteľnosť výrazu $V(n)$ číslom 12 možno dokázať aj inými spôsobmi, napríklad môžeme využiť rozklad

$$V(n) = n^4 + 11n^2 - 12 = (n^2 + 12)(n^2 - 1)$$

alebo prejsť k dvojčlenu $n^4 + 11n^2$ a podobne.

Odpoveď. Hľadané číslo d je rovné 12.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Dokážte, že v nekonečnom rade čísel

$$1 \cdot 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 3 \cdot 4,\ 3 \cdot 4 \cdot 5,\ 4 \cdot 5 \cdot 6,\ \ldots,$$

je číslo prvé deliteľom všetkých čísel ďalších. [Využite to, že z dvoch, resp. troch po sebe idúcich čísel je vždy niektoré číslo deliteľné dvoma, resp. troma.]

N2. Nájdite všetky celé $d > 1$, pri ktorých hodnoty výrazov $U(n) = n^3 + 17n^2 - 1$ a $V(n) = n^3 + 4n^2 + 12$ dávajú po delení číslom d rovnaké zvyšky, nech je celé číslo n zvolené akokoľvek. [Vyhovuje jedine $d = 13$. Hľadané d sú práve tie, ktoré delia rozdiel $U(n) - V(n) = 13n^2 - 13 = 13(n - 1)(n + 1)$ pre každé celé n. Aby sme ukázali, že (zrejme vyhovujúce) $d = 13$ je jediné, dosaďme do rozdielu $U(n) - V(n)$ hodnotu $n = d$: číslo d je s číslami $d - 1$ a $d + 1$ nesúdeliteľné, takže delí súčin $13(d - 1)(d + 1)$ jedine vtedy, keď delí činiteľ 13, teda keď $d = 13$.]

D1. Pre ktoré prirodzené čísla n nie je výraz $V(n) = n^4 + 11n^2 - 12$ násobkom ôsmich? [Výraz $V(n) = (n-1)(n+1)(n^2+12)$ je určite násobkom ôsmich v prípade nepárneho n, lebo $n - 1$ a $n + 1$ sú dve po sebe idúce párne čísla, takže jedno z nich je deliteľné štyrmi, a súčin oboch je tak násobkom ôsmich. Keďže pre párne n je súčin $(n-1)(n+1)$ nepárny, hľadáme práve tie n tvaru $n = 2k$, pre ktoré nie je deliteľný ôsmimi výraz $n^2 + 12 = 4(k^2 + 3)$, čo nastane práve vtedy, keď k je párne. Hľadané n sú teda práve tie, ktoré sú deliteľné štyrmi.]

D2. Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n a k väčšie ako 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ deliteľné dvanástimi. [59–C–II–1]

D3. Dokážte, že výrazy $23x + y$, $19x + 3y$ sú deliteľné číslom 50 pre rovnaké dvojice prirodzených čísel x, y. [60–C–I–2]

D4. Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo. [62–C–I–5]

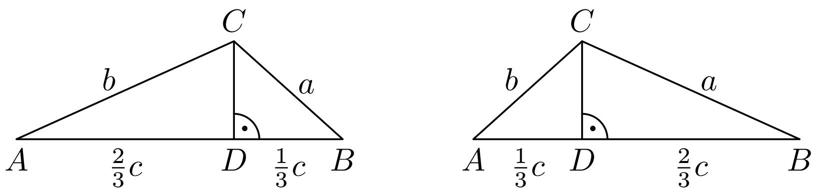
D5. Dokážte, že pre každé nepárne prirodzené číslo n je súčet $n^4 + 2n^2 + 2\,013$ deliteľný číslom 96. [63–C–I–5]

3. *Päta výšky z vrcholu C v trojuholníku ABC delí stranu AB v pomere $1 : 2$. Dokážte, že pri zvyčajnom označení dĺžok strán trojuholníka ABC platí nerovnosť*

$$3|a-b| < c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Päta D uvažovanej výšky je podľa zadania tým vnútorným bodom strany AB, pre ktorý platí $|AD| = 2|BD|$ alebo $|BD| = 2|AD|$. Obe možnosti sú znázornené na obr. 1 s popisom dĺžok strán AC, BC a oboch úsekov rozdelenej strany AB.



Obr. 1

Pytagorova veta pre pravouhlé trojuholníky ACD a BCD vedie k dvojakému vyjadreniu druhej mocniny spoločnej odvesny CD, pričom v situácii naľavo dostaneme

$$|CD|^2 = b^2 - (\tfrac{2}{3}c)^2 = a^2 - (\tfrac{1}{3}c)^2,$$

odkiaľ po jednoduchej úprave poslednej rovnosti dostaneme vzťah

$$3(b^2 - a^2) = c^2.$$

Pre druhú situáciu vychádza analogicky

$$3(a^2 - b^2) = c^2.$$

Závery pre obe možnosti možno zapísať jednotne ako rovnosť s absolútnou hodnotou

$$3|a^2 - b^2| = c^2.$$

Ak použijeme rozklad $|a^2 - b^2| = |a-b|(a+b)$ a nerovnosť $c < a+b$ (ktorú ako je známe spĺňajú dĺžky strán každého trojuholníka ABC), dostaneme z odvodenej rovnosti

$$3|a-b|c < 3|a-b|(a+b) = c^2,$$

odkiaľ po vydelení kladnou hodnotou c dostaneme $3|a-b| < c$, ako sme mali dokázať.

Zdôraznime, že nerovnosť $3|a-b|c < 3|a-b|(a+b)$ sme správne zapísali ako ostrú – v prípade $a = b$ by síce prešla na rovnosť, avšak podľa nášho odvodenia by potom platilo $c^2 = 0$, čo odporuje tomu, že sa jedná o dĺžku strany trojuholníka.

Iné riešenie. Nerovnosť, ktorú máme dokázať, možno po vydelení tromi zapísať bez absolútnej hodnoty ako dvojicu nerovností

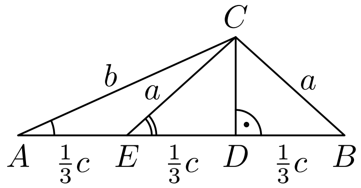
$$-\tfrac{1}{3}c < a - b < \tfrac{1}{3}c.$$

Opäť ako v pôvodnom riešení rozlíšime dve možnosti pre polohu päty D uvažovanej výšky a ukážeme, že vypísanú dvojicu nerovností možno upresniť na tvar

$$-\tfrac{1}{3}c < a - b < 0, \quad \text{respektíve} \quad 0 < a - b < \tfrac{1}{3}c,$$

podľa toho, či nastáva situácia z ľavej či pravej časti obr. 1.

Pre situáciu z obr. 1 naľavo prepíšeme avizované nerovnosti $-\frac{1}{3}c < a - b < 0$ ako $a < b < a + \frac{1}{3}c$ a odvodíme ich z pomocného trojuholníka ACE, pričom E je stred úsečky AD, takže body D a E delia stranu AB na tri zhodné úseky dĺžky $\frac{1}{3}c$.



Obr. 2

V obr. 2 sme rovno vyznačili, že úsečka EC má dĺžku a ako úsečka BC, a to v dôsledku zhodnosti trojuholníkov BCD a ECD podľa vety *sus*. Preto je pravá z nerovností $a < b < a + \frac{1}{3}c$ porovnaním dĺžok strán trojuholníka ACE, ktoré má všeobecnú platnosť.

Ľavú nerovnosť $a < b$ odvodíme z druhého všeobecného poznatku, že totiž v každom trojuholníku *oproti väčšiemu vnútornému uhlu leží dlhšia strana.* Stačí nám teda zdôvodniť, prečo pre uhly vyznačené na obr. 2 platí $|\measuredangle CAE| < |\measuredangle AEC|$. To je však jednoduché: zatiaľ čo uhol CAE je vďaka pravouhlému trojuholníku ACD ostrý, uhol AEC je naopak tupý, pretože k nemu vedľajší uhol CED je ostrý vďaka pravouhlému trojuholníku CED.

Pre prípad situácie z obr. 1 napravo možno predchádzajúci postup zopakovať s novým bodom E, tentoraz stredom úsečky BD. Môžeme však vďaka súmernosti podľa osi AB konštatovať, že z dokázaných nerovností $-\frac{1}{3}c < a - b < 0$ pre situáciu naľavo vyplývajú nerovnosti $-\frac{1}{3}c < b - a < 0$ pre situáciu napravo, z ktorých po vynásobení číslom -1 dostaneme práve nerovnosti $0 < a - b < \frac{1}{3}c$, ktoré sme mali v druhej situácii dokázať.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Pripomeňte si, ktoré nerovnosti spĺňajú medzi sebou dĺžky strán ľubovoľného trojuholníka (a ktorým preto hovoríme *trojuholníkové*). Z nich potom odvoďte známe pravidlo $\alpha < \beta \Rightarrow a < b$ o porovnaní veľkostí vnútorných uhlov a dĺžok protiľahlých strán v ľubovoľnom trojuholníku ABC. [Ak je $\alpha < \beta$, môžeme nájsť vnútorný bod X strany AC, pre ktorý platí $|\measuredangle ABX| = \alpha$, a teda $|AX| = |BX|$, takže z trojuholníkovej nerovnosti $|BC| < |BX| + |XC|$ už vyplýva $a < b$.]

N2. Ak je D vnútorný bod úsečky AB, tak pre každý bod X kolmice vedenej bodom D na priamku AB má výraz $|AX|^2 - |BX|^2$ tú istú hodnotu (rovnú hodnote $|AD|^2 - |BD|^2$). Dokážte. [Použite Pytagorovu vetu pre trojuholníky ADX a BDX.]

D1. Odvoďte nerovnosť, ktorá je zovšeobecnením nerovnosti zo zadania súťažnej úlohy pre prípad, keď päta výšky z vrcholu C trojuholníka ABC rozdeľuje jeho stranu AB v pomere $1 : p$, pričom p je dané kladné číslo rôzne od 1. [$(p+1)|a-b| < |p-1|c$.]

D2. Pre každý bod M vnútri daného rovnostranného trojuholníka ABC označme M_a, M_b, M_c jeho kolmé priemety postupne na strany BC, AC, AB. Dokážte rovnosť $|AM_b| + |BM_c| + |CM_a| = |AM_c| + |BM_a| + |CM_b|$. [Najskôr trikrát použite výsledok úlohy N2 s bodom $X = M$ a z toho vyplývajúce vyjadrenia rozdielov $|AM|^2 - |BM|^2$, $|BM|^2 - |CM|^2$, $|CM|^2 - |AM|^2$ jednotlivo upravte a potom sčítajte.]

4. *Nájdite všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ s celočíselnými koeficientmi a, b, c, pre ktoré platí $P(1) < P(2) < P(3)$ a zároveň*

$$\big(P(1)\big)^2 + \big(P(2)\big)^2 + \big(P(3)\big)^2 = 22.$$

(*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Keďže a, b, c sú podľa zadania celé čísla, sú také aj hodnoty $P(1)$, $P(2)$ a $P(3)$. Ich druhé mocniny, čiže čísla $P(1)^2$, $P(2)^2$ a $P(3)^2$, sú preto druhými mocninami celých čísel, teda tri (nie nutne rôzne) čísla z množiny $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$. Ich súčet je podľa zadania rovný 22, takže každý z troch sčítancov je menší ako šieste možné číslo 25. Akými spôsobmi možno vôbec zostaviť súčet 22 z troch čísel vybraných z množiny $\{0, 1, 4, 9, 16\}$?

Systematickým rozborom rýchlo zistíme, že rozklad čísla 22 na súčet troch druhých mocnín je (až na poradie sčítancov) iba jeden, a to $22 = 4 + 9 + 9$. Dve z čísel $P(1)$, $P(2)$ a $P(3)$ majú teda absolútnu hodnotu 3 a tretie 2, a keďže $P(1) < P(2) < P(3)$, musí nutne platiť $P(1) = -3$, $P(3) = 3$ a $P(2) \in \{-2, 2\}$. Pre každú z oboch vyhovujúcich trojíc

$$\big(P(1), P(2), P(3)\big) = (-3, -2, 3) \quad \text{a} \quad \big(P(1), P(2), P(3)\big) = (-3, 2, 3)$$

určíme koeficienty a, b, c príslušného trojčlena $P(x)$ tak, že nájdené hodnoty dosadíme do pravých strán rovníc

$$\begin{aligned} a + b + c &= P(1),\\ 4a + 2b + c &= P(2),\\ 9a + 3b + c &= P(3) \end{aligned}$$

a výslednú sústavu troch rovníc s neznámymi a, b, c vyriešime. Tento jednoduchý výpočet tu vynecháme, v oboch prípadoch vyjdú celočíselné trojice (a, b, c), ktoré zapíšeme rovno ako koeficienty trojčlenov, ktoré sú jedinými dvoma riešeniami danej úlohy:

$$P_1(x) = 2x^2 - 5x \quad \text{a} \quad P_2(x) = -2x^2 + 11x - 12.$$

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Určte všetky dvojčleny $P(x) = ax + b$, pre ktoré platí $P(2) = 3$ a $P(3) = 2$. [Jediný dvojčlen $P(x) = 5 - x$, pretože sústava rovníc $2a + b = P(2) = 3$, $3a + b = P(3) = 2$ má jediné riešenie $a = -1$ a $b = 5$.]

N2. Určte všetky trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$, pre ktoré platí $P(1) = 4$, $P(2) = 9$ a $P(3) = 18$. [Jediný trojčlen $P(x) = 2x^2 - x + 3$, pretože sústava rovníc $a + b + c = 4$, $4a + 2b + c = 9$, $9a + 3b + c = 18$ má jediné riešenie $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$.]

N3. Určte všetky dvojčleny $P(x) = ax + b$ s celočíselnými koeficientmi a a b, pre ktoré platí $P(1) < P(2)$ a $P(1)^2 + P(2)^2 = 5$. [Vyhovujú práve štyri dvojčleny $x + 0$, $3x - 4$, $x - 3$ a $3x - 5$. Číslo 5 sa dá zapísať jediným spôsobom ako súčet dvoch druhých mocnín celých čísel, keď neberieme ohľad na poradie sčítancov, a to $5 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2$. Preto čísla $P(1) < P(2)$ tvoria jednu z dvojíc $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-2, -1)$, $(-2, 1)$; pre každú z nich vypočítajte koeficienty a, b postupom k úlohe N1.]

D1. Pre ktoré trojčleny $P(x) = ax^2 + bx + c$ platí rovnosť $P(4) = P(1) - 3P(2) + 3P(3)$? [Pre všetky. Presvedčte sa dosadením, že obe strany dotyčnej rovnosti sú rovné $16a + 4b + c$.]

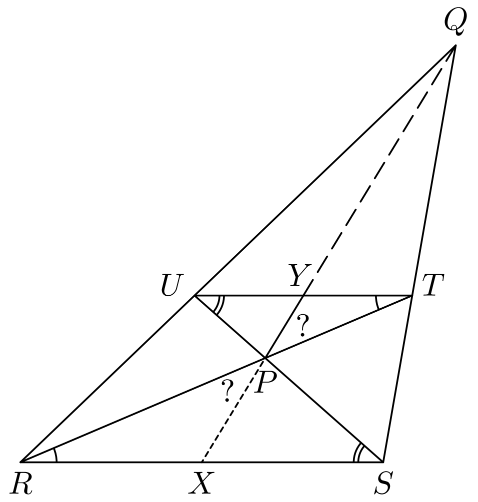
D2. Koeficienty a, b, c trojčlena $P(x) = ax^2 + bx + c$ sú reálne čísla, pritom každá z troch jeho hodnôt $P(1)$, $P(2)$ a $P(3)$ je celým číslom. Vyplýva z toho, že aj čísla a, b, c sú celé, alebo je nutne celé aspoň niektoré z nich (ktoré)? [Nevyplýva, uvážte príklad trojčlena $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$: z vyjadrenia $P(x) = \frac{1}{2}x(x + 1) + 1$ vyplýva, že $P(x)$ je celým číslom pre každé celé x, pretože súčin $x(x + 1)$ je vtedy deliteľný dvoma. Vo všeobecnej situácii je iba koeficient c nutne celé číslo; vyplýva to z vyjadrenia $c = P(0) = 3P(1) - 3P(2) + P(3)$.]

5. *V danom trojuholníku ABC zvoľme vnútri strany AC body K, M a vnútri strany BC body L, N tak, že*

$$|AK| = |KM| = |MC|, \quad |BL| = |LN| = |NC|.$$

Ďalej označme E priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABLK$, F priesečník uhlopriečok lichobežníka $KLNM$ a G priesečník uhlopriečok lichobežníka $ABNM$. Dokážte, že body E, F a G ležia na ťažnici trojuholníka ABC z vrcholu C a určte pomer $|GF| : |EF|$. (Šárka Gergelitsová)

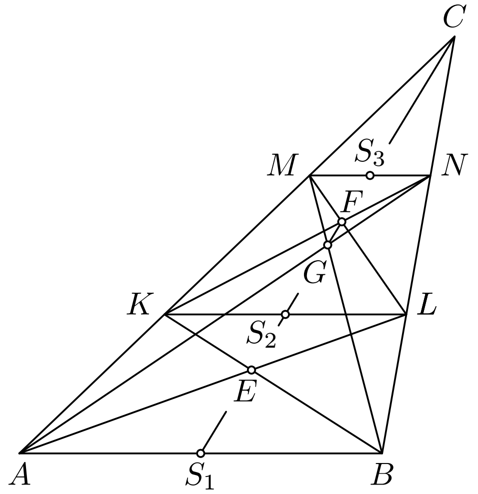
Riešenie. Pred samotným riešením odvodíme dôležité vlastnosti všeobecného lichobežníka $RSTU$: *Ak označíme X a Y postupne stredy základní RS a TU, tak na úsečke XY leží priesečník P uhlopriečok RT a SU, a to tak, že $|PX| : |PY| = |RS| : |TU|$. Na priamke XY leží tiež priesečník Q predĺžených ramien RU a ST, a to tak, že $|QX| : : |QY| = |RS| : |TU|$* (obr. 3).



Obr. 3

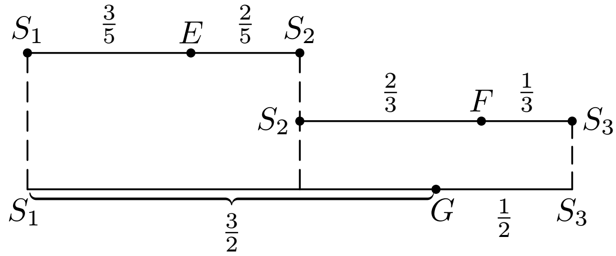
Napriek tomu, že sa podľa obrázka zdá, že bod P na úsečke XY naozaj leží, musíme tento poznatok *dokázať*, teda odvodiť argumentáciou nezávislou na presnosti nášho rysovania. Na to určite stačí preukázať, že obe úsečky PX, PY zvierajú s priamkou RT zhodné uhly (na obrázku vyznačené otáznikmi). Všimnime si, že tieto úsečky sú ťažnicami trojuholníkov RSP a TUP, ktoré sa zhodujú vo vnútorných uhloch (vyznačených oblúčikmi) pri rovnobežných stranách RS a TU, takže sa jedná o trojuholníky podobné, a to s koeficientom $k = |TU|/|RS|$. Ako vieme (úloha N2), s rovnakým koeficientom platí aj podobnosť „polovíc" týchto trojuholníkov vyťatých ich ťažnicami, presnejšie podobnosť $RXP \sim TYP$. Z nej už želaná zhodnosť uhlov RPX a TPY aj želaná rovnosť $|PY| = k|PX|$ (vďaka rovnakému koeficientu) vyplýva. Všetko o bode P je tak dokázané; podobne sa overia aj obe vlastnosti bodu Q – ukáže sa, že úsečky QX a QY zvierajú ten istý uhol s priamkou RQ a ich dĺžky sú zviazané rovnosťou $|QY| = k|QX|$, a to vďaka tomu, že QX a QY sú ťažnice v dvoch navzájom podobných trojuholníkoch RSQ a UTQ.

Dokázané vlastnosti všeobecného lichobežníka nám umožnia celkom ľahko vyriešiť zadanú úlohu. Situácia je znázornená na obr. 4. Okrem pomenovaných bodov sme tam ešte označili S_1, S_2, S_3 stredy úsečiek AB, KL a MN. Keďže trojuholníky ABC, KLC



Obr. 4

a MNC sú navzájom podobné (podľa vety *sus*), platí $|AB| : |KL| : |MN| = |AC| : |KC| : |MC| = 3 : 2 : 1$. Podľa zhodných vnútorných uhlov spomenutých troch trojuholníkov platí tiež $AB \parallel KL \parallel MN$. Štvoruholníky $ABLK$, $KLNM$ a $ABNM$ tak sú naozaj lichobežníky (ako je prezradené v zadaní) so základňami AB, KL a MN, ktorých dĺžky sú v už odvodenom pomere $3 : 2 : 1$. Navyše predĺžené ramená všetkých troch lichobežníkov sa pretínajú v bode C, ktorým preto podľa dokázanej vlastnosti prechádzajú priamky S_1S_2, S_2S_3 (a S_1S_3), takže sa jedná o jednu priamku, na ktorej body S_1, S_2, S_3 a C ležia v uvedenom poradí tak, že $|S_1C| : |S_2C| : |S_3C| = 3 : 2 : 1$. Z toho vyplýva $|S_1S_2| = |S_2S_3|$ $(= |S_3C|)$, takže bod S_2 je stredom úsečky S_1S_3. Na nej (opäť podľa dokázaného tvrdenia) ležia aj body E, F a G, pričom pre bod E medzi bodmi S_1, S_2 platí $|ES_1| : |ES_2| = 3 : 2$, pre bod F medzi bodmi S_2, S_3 platí $|FS_2| : |FS_3| = 2 : 1$ a napokon pre bod G medzi bodmi S_1, S_3 platí $|GS_1| : |GS_3| = 3 : 1$. Tieto delenia troch úsečiek sme znázornili na obr. 5, kam sme zapísali aj dĺžky vzniknutých úsekov pri voľbe jednotky $1 = |S_1S_2| = |S_2S_3|$ (pri ktorej $|S_1S_3| = 2$).



Obr. 5

Keďže
$$|S_1F| = |S_1S_2| + |S_2F| = 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3} > \tfrac{3}{2} = |S_1G|,$$
platí $|GF| = |S_1F| - |S_1G| = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$, čo spolu s rovnosťou $|EF| = |ES_2| + |S_2F| = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$ už vedie k určeniu hľadaného pomeru
$$|GF| : |EF| = \tfrac{1}{6} : \tfrac{16}{15} = 5 : 32.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zopakujte si, čo viete o podobnosti dvoch trojuholníkov z učiva základnej školy: Podobnosť $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ s koeficientom k znamená, že pre zvyčajne označené dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov oboch trojuholníkov platia rovnosti $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, $c_2 = kc_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \beta_1$, $\gamma_2 = \gamma_1$. Stačí na to, aby platilo (i) $a_2 : b_2 : c_2 = a_1 : b_1 : c_1$ (veta *sss*) alebo (ii) $\alpha_2 = \alpha_1$ a $\beta_2 = \beta_1$ (veta *uu*) alebo (iii) $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$ a $\gamma_2 = \gamma_1$ (veta *sus*).

N2. Nech $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ sú ľubovoľné dva podobné trojuholníky ($\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$). Označme S_1, S_2 postupne stredy strán A_1B_1, A_2B_2. Dokážte podobnosť $\triangle A_1S_1C_1 \sim \triangle A_2S_2C_2$ a dokážte, že má rovnaký koeficient ako pôvodná podobnosť $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. [Podobnosť $\triangle A_1S_1C_1 \sim \triangle A_2S_2C_2$ platí vďaka vete *sus*, pretože vnútorné uhly oboch trojuholníkov pri vrcholoch A_1, A_2 sú zhodné a pre dĺžky strán, ktoré ich zvierajú, platí $|A_2S_2| : |A_1S_1| = \left(\frac{1}{2}|A_2B_2|\right) : \left(\frac{1}{2}|A_1B_1|\right) = |A_2B_2| : |A_1B_1| = |A_2C_2| : |A_1C_1|$. Predpokladaná aj dokázaná podobnosť majú taký istý koeficient $k = |A_2B_2|/|A_1B_1|$.]

N3. Dokážte, že ľubovoľná spojnica ramien daného lichobežníka $ABCD$, ktorá je rovnobežná s jeho základňami $AB \parallel CD$, je úsečka, ktorej stred leží na spojnici stredov oboch základní. Potom dokážte, že priesečník uhlopriečok P je stredom tej zo spomenutých spojníc ramien, ktorá týmto priesečníkom prechádza. [Použite najskôr výsledok úlohy N2 pre podobné trojuholníky so spoločným vrcholom, ktorým je priesečník predĺžených ramien, a protiľahlými stranami, ktorými sú jednak základňa lichobežníka, jednak uvažovaná spojnica ramien. Na dôkaz vlastnosti priesečníka P označte $E \in BC$, $F \in AD$ krajné body prislúchajúcej spojnice ramien a využite to, že podobnosť trojuholníkov APF, ACD má taký istý koeficient ako podobnosť trojuholníkov BEP, BCD.]

D1. Vnútri strán AB, AC daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body E, F, pričom $EF \parallel BC$. Úsečka EF je potom rozdelená bodom D tak, že platí $p = |ED| : |DF| = |BE| : |EA|$.
   a) Ukážte, že pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD je pre $p = 2 : 3$ rovnaký ako pre $p = 3 : 2$.
   b) Zdôvodnite, prečo pomer obsahov trojuholníkov ABC a ABD má hodnotu aspoň 4. [65–C–I–4]

D2. Označme E stred základne AB lichobežníka $ABCD$, v ktorom platí $|AB| : |CD| = 3 : 1$. Uhlopriečka AC pretína úsečky ED, BD postupne v bodoch F, G. Určte postupný pomer $|AF| : |FG| : |GC|$. [64–C–I–4]

---

6. *a) Marienka rozmiestni do vrcholov pravidelného osemuholníka rôzne počty od jedného po osem cukríkov. Peter si potom môže vybrať, ktoré tri kôpky cukríkov dá Marienke, ostatné si ponechá. Jedinou podmienkou je, že tieto tri kôpky ležia vo vrcholoch rovnoramenného trojuholníka. Marienka chce rozmiestniť cukríky tak, aby ich dostala čo najviac, nech už Peter trojicu vrcholov vyberie akokoľvek. Koľko ich tak Marienka zaručene získa?*

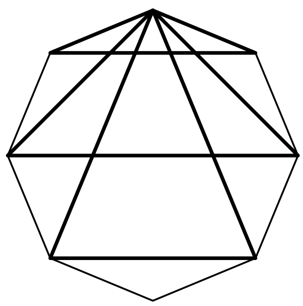
b) Rovnakú úlohu vyriešte aj pre pravidelný deväťuholník, do ktorého vrcholov rozmiestni Marienka 1 až 9 cukríkov. (Medzi rovnoramenné trojuholníky zaraďujeme aj trojuholníky rovnostranné.)

(*Jaromír Šimša*)

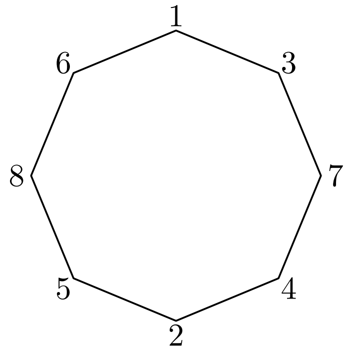
Riešenie. Marienka musí počítať s tým, že Peter vyberie takú trojicu vrcholov rovnoramenného trojuholníka, v ktorých je dokopy čo najmenej cukríkov. Preto je v záujme Marienky rozmiestniť cukríky tak, aby bol spomenutý minimálny počet čo najväčší.

a) Ukážeme najskôr, že nech Marienka rozmiestni cukríky do vrcholov pravidelného osemuholníka v počtoch 1 až 8 akokoľvek, Peter vždy nájde rovnoramenný trojuholník, v ktorého vrcholoch je dokopy *nanajvýš desať* cukríkov.

Najskôr si rozmyslime (použite napríklad obr. 6, kde sú vyznačené všetky tri typy rovnoramenných trojuholníkov), že každé dva rôzne vrcholy pravidelného osemuholníka sú vrcholmi buď dvoch, alebo štyroch uvažovaných rovnoramenných trojuholníkov. Rozlíšime pritom, ktorú zo vzdialeností[1] 1, 2, 3, 4 dané dva vrcholy majú, podľa toho je počet oných trojuholníkov postupne 2, 4, 2, 2 (overte sami). Ak teda vyberie Peter najskôr tie dva vrcholy, do ktorých Marienka rozmiestni 1 a 2 cukríky, má potom na výber tretieho vrcholu aspoň dve možnosti, takže sa môže vyhnúť prípadnému výberu, keď by Marienka získala $1+2+8$ cukríkov, a zvoliť vždy výber, keď Marienka dostane nanajvýš $1{+}2{+}7=10$ cukríkov. Opísali sme teda Petrovu stratégiu, pri ktorej Marienka nezíska viac ako 10 cukríkov.



Obr. 6



Obr. 7

V druhej časti riešenia úlohy a) poradíme Marienke jedno konkrétne rozmiestnenie, pri ktorom 10 cukríkov zaručene získa, nech Peter urobí výber rovnoramenného trojuholníka akokoľvek. Pôjde o rozmiestnenie, keď do jednotlivých vrcholov postupne v jednom smere po obvode útvaru rozmiestnime 1, 3, 7, 4, 2, 5, 8 a 6 cukríkov (obr. 7).

Teraz je nutné overiť, že súčet čísel pri vrcholoch každého rovnoramenného trojuholníka na obr. 7 je rovný aspoň 10. Pri kontrole stačí testovať iba súčty, ktoré sú podľa dvoch najmenších sčítancov tvaru $1+2+x$, $1+3+x$ či $2+3+x$ (ostatné súčty sú určite aspoň 10). Z obr. 7 vidíme, že sa jedná práve o súčty

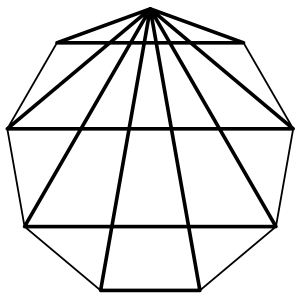
$$1+2+8,\ 1+2+7,\ 1+3+7,\ 1+3+6,\ 2+3+8,\ 2+3+6,$$

z ktorých žiadny nie je menší ako 10. Marienka tak má stratégiu, ktorá jej prináša zisk aspoň 10 cukríkov (uvedený príklad rozmiestnenia je iba jeden z mnohých možných). Z prvej časti riešenia pritom vyplýva, že Marienka zisk viac ako 10 cukríkov zaručený nemá.

b) Pri riešení druhej úlohy už nebudeme opakovať komentáre o stratégiách Petra a Marienky a cukríky pri vrcholoch zameníme ich počtami, t. j. číslami.

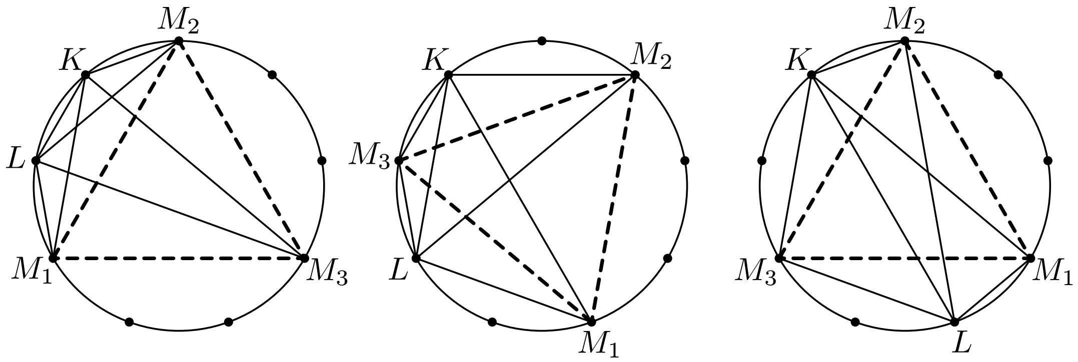
V prvej časti budeme predpokladať, že k vrcholom pravidelného deväťuholníka sú pripísané čísla od 1 do 9 akokoľvek, a ukážeme, že pre súčet s troch čísel pri vrcholoch vhodného rovnoramenného trojuholníka platí $s \leqq 10$.

[1] Máme na mysli počet strán mnohouholníka na kratšej z oboch ciest po jeho obvode, ktoré dané dva vrcholy spájajú.



Obr. 8

Pri pravidelnom deväťuholníku je počet rovnoramenných trojuholníkov s danými dvoma vrcholmi buď rovný 1 (jedná sa o rovnostranný trojuholník), alebo je rovný 3 – podľa ich vzdialenosti 1, 2, 3, 4 je tento počet totiž postupne 3, 3, 1, 3 (sami overte, na obr. 8 sú vyznačené všetky štyri typy rovnoramenných trojuholníkov). Navyše budeme potrebovať ešte poznatok, že pri oných troch rovnoramenných trojuholníkoch s dvoma pevnými vrcholmi tvoria ich tretie vrcholy vždy rovnostranný trojuholník. Vyplýva to z obr. 9 pre tri situácie, keď vzdialenosť dvoch pevných vrcholov K a L je 1, resp. 2, resp. 4 (všetky rovnoramenné trojuholníky KLM_i sú vykreslené).



Obr. 9

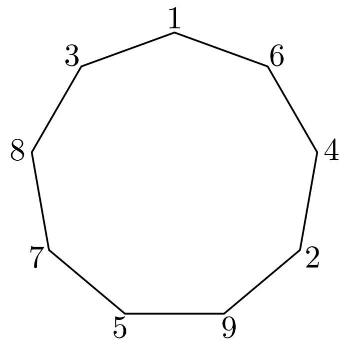
Teraz už môžeme dokázať nerovnosť $s \leqq 10$ pri ľubovoľnom očíslovaní vrcholov, ako sme sľúbili v úvodnej vete riešenia časti b).

Ak je trojuholník s číslami 1, 2, 3 rovnostranný, vyberieme ho a dostaneme dokonca $s = 1+2+3 = 6$; v opačnom prípade sú (podľa predchádzajúcich úvah) čísla 1 a 2 alebo čísla 1 a 3 pri vrcholoch troch rovnoramenných trojuholníkov. Znamená to, že potom medzi skúmanými súčtami sú tri súčty tvaru $1 + 2 + x$ alebo tri súčty tvaru $1 + 3 + x$. Môžeme sa teda vyhnúť dvom prípadným súčtom pre $x = 9$ a $x = 8$ a vybrať iba ten zo súčtov, v ktorom bude $x \leqq 7$. S výnimkou jediného prípadu $s = 1 + 3 + 7 = 11$ dostaneme vždy $s \leqq 10$.

Keby však náš postup predsa len skončil hodnotou $s = 11$, znamenalo by to, že čísla 1 a 2 stoja pri vrcholoch rovnostranného trojuholníka (inak by sme vybrali súčet $1 + 2 + x$ s $x \leqq 7$) a navyše existujú tri rovnoramenné trojuholníky so súčtami $1 + 3 + 7$, $1 + 3 + 8$ a $1 + 3 + 9$. Tieto tri trojuholníky s dvoma spoločnými vrcholmi (s číslami 1 a 3) však podľa odseku ukončeného obr. 9 zaručujú, že trojuholník so súčtom $7 + 8 + 9$ je rovnostranný, takže tretí vrchol rovnostranného trojuholníka, pri ktorého vrcholoch stoja čísla 1 a 2, nemôže byť žiadne z čísel 7, 8, 9. Našli sme teda rovnostranný trojuholník so súčtom $s \leqq 1 + 2 + 6 = 9$.

Dokázali sme tak, že v prípade, keď trojuholník so súčtom $1 + 2 + 3$ nie je rovnostranný, existuje vždy rovnoramenný trojuholník so súčtom nanajvýš 10. Prvá časť riešenia je preto hotová.

V druhej časti riešenia úlohy b) uvedieme príklad očíslovania vrcholov pravidelného deväťuholníka (opäť jedného z mnohých), keď súčet troch čísel pri vrcholoch každého rovnoramenného trojuholníka je aspoň 10. Vrcholy v jednom smere po obvode označíme postupne číslami 1, 6, 4, 2, 9, 5, 7, 8 a 3 (obr. 10).



Obr. 10

Aj tentoraz stačí otestovať súčty tvaru $1+2+x$, $1+3+x$, $2+3+x$, čo sú podľa obr. 10 práve súčty

$$1+2+7,\ 1+3+6,\ 1+3+8,\ 1+3+9,\ 2+3+6,\ 2+3+8,\ 2+3+9,$$

medzi ktorými naozaj nie je žiadny menší ako 10.

Odpoveď. Pre obe úlohy a) a b) platí, že najväčší počet cukríkov, ktoré Marienka môže zaručene získať, je rovný 10.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. K vrcholom pravidelného sedemuholníka pripíšeme čísla od 1 do 7 v akomkoľvek poradí. Dokážte, že súčet troch čísel pri vrcholoch niektorého rovnoramenného trojuholníka je menší ako 9. [Uvážte dva vrcholy X a Y s číslami 1 a 2 a rozborom všetkých možností overte, že existujú vždy tri rovnoramenné trojuholníky XYZ s vhodnou voľbou tretieho vrcholu Z. Vyberieme z nich to Z, pri ktorom nie je ani číslo 7, ani číslo 6. Súčet čísel pri vrcholoch príslušného trojuholníka XYZ je potom nanajvýš $1 + 2 + 5 = 8$.]

N2. Ostane všeobecne platné tvrdenie z úlohy N1, keď v ňom záverečné číslo 9 zameníme číslom 8? [Nie. Pripíšte vrcholom v jednom smere po obvode postupne čísla 1, 3, 4, 2, 5, 6 a 7. Potom súčet troch čísel pri vrcholoch každého rovnoramenného trojuholníka bude aspoň 8. Uvedomte si, že pri overovaní posledného poznatku (aj pre iné rozmiestnenie čísel ako nami uvedené) stačí overiť, že sú *rôznostranné* tie dva trojuholníky, ktoré majú pri svojich vrcholoch trojice čísel $(1, 2, 3)$ a $(1, 2, 4)$.]

D1. Každý vrchol pravidelného devätnásťuholníka je ofarbený jednou zo šiestich farieb. Dokážte, že niektorý tupouhlý trojuholník má všetky vrcholy ofarbené rovnakou farbou. [62–C–S–3]

D2. Rozhodnite, či z ľubovoľných siedmich vrcholov daného pravidelného 19-uholníka možno vždy vybrať štyri, ktoré sú vrcholmi lichobežníka. [62–C–I–4]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Ján Mazák, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016