66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

---

1. *Každému vrcholu pravidelného 66-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1. Ku každej úsečke spájajúcej dva jeho vrcholy (strane či uhlopriečke) potom pripíšeme súčin čísel v jej krajných bodoch a všetky čísla pri jednotlivých úsečkách sčítame. Určte najmenšiu možnú a najmenšiu nezápornú hodnotu takéhoto súčtu.* (Pavel Calábek)

Riešenie. Predpokladajme, že niektorým k vrcholom ($0 \leqq k \leqq 66$) pravidelného 66--uholníka je priradené číslo 1 a ostatným $66-k$ vrcholom číslo -1. Ku každej úsečke spájajúcej dva vrcholy s číslami 1 pripíšeme podľa podmienok úlohy číslo 1. Takých úsečiek je spolu $\frac{1}{2}k(k-1)$. Podobne aj ku každej úsečke, ktorej oba krajné body majú priradené číslo -1, pripíšeme číslo 1. Takých úsečiek je spolu $\frac{1}{2}(66-k)(65-k)$. Napokon každej zo zvyšných úsečiek (a tých je $k(66-k)$) pripíšeme číslo -1.

Hodnota S súčtu všetkých čísel pripísaných k jednotlivým úsečkám (stranám či uhlopriečkam uvažovaného 66-uholníka) je teda

$$\begin{aligned} S &= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(66-k)(65-k)}{2} - k(66-k) = \\ &= 2k^2 - 2\cdot 66k + 65\cdot 33 = \\ &= 2(k-33)^2 - 33. \end{aligned}$$

Vidíme, že vždy platí $S \geqq -33$, pričom rovnosť zrejme nastane pre $k = 33$.

Teraz zistíme, pre ktoré k ($0 \leqq k \leqq 66$) je splnená nerovnosť $S \geqq 0$. Budú to práve tie k, pre ktoré platí $|k-33| \geqq \sqrt{33/2} > 4$, takže pre nezáporné hodnoty S bude určite platiť $S \geqq 2\cdot 5^2 - 33 = 17$. Rovnosť nastane, keď bude $|k-33| = 5$, čiže $k \in \{28, 38\}$.

Záver. Skúmaný výraz nadobúda najmenšiu hodnotu $S = -33$ pre $k = 33$. Najmenšia možná nezáporná hodnota skúmaného súčtu je $S = 17$ pre $k = 28$ či $k = 38$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte najmenšiu celočíselnú hodnotu výrazu $U = |x-\sqrt{3}| + \sqrt{5}$, pričom x je ľubovoľné reálne číslo. [Najmenšia celočíselná hodnota výrazu U je 3 (pre $x = \sqrt{3} - \sqrt{5} + 3$ či pre $x = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 3$).]

N2. Určte najmenšiu hodnotu výrazu $V = 3x^2 + 4x + 5$, pričom x je ľubovoľné reálne číslo, a nájdite tiež jeho najmenšiu celočíselnú hodnotu. [Najmenšia možná hodnota výrazu V je $\frac{11}{3}$, je dosiahnutá pre $x = -\frac{2}{3}$. Najmenšia celočíselná hodnota skúmaného výrazu je $V = 4$ a je dosiahnutá pre $x = -1$ či $x = -\frac{1}{3}$.]

N3. Každému vrcholu pravidelného 63-uholníka priradíme jedno z čísel 1 alebo -1. Ku každej jeho strane pripíšeme súčin čísel v jej vrcholoch a všetky čísla pri jednotlivých stranách sčítame. Nájdite najmenšiu možnú nezápornú hodnotu takého súčtu. [63–B–I–1]

D1. Nech pre $x_i \in \{-1, 1\}$ platí $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. Dokážte, že n je párne číslo. [Každý z n sčítancov v danom súčte je rovný buď 1, alebo -1. Jedna polovica z nich musí byť preto rovná 1 a druhá -1. Číslo n je teda nutne párne.]

---

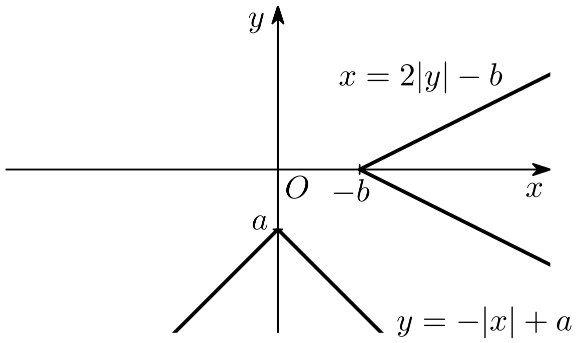
2. *Určte všetky dvojice (a, b) reálnych parametrov, pre ktoré má sústava rovníc*

$$\begin{aligned} |x| + y &= a, \\ 2|y| - x &= b \end{aligned}$$

práve tri riešenia v obore reálnych čísel, a pre každú z nich tieto riešenia určte.

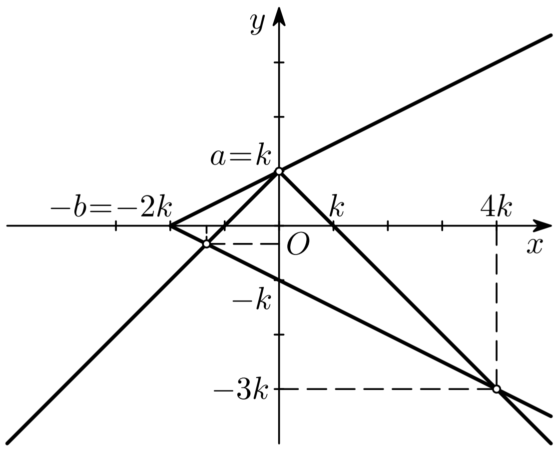
(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Namiesto bežného algebraického postupu dáme prednosť grafickej metóde riešenia danej sústavy rovníc. Za tým účelom ju prepíšeme na tvar $y = -|x| + a$, $x = 2|y| - b$. Z grafov oboch týchto závislostí medzi premennými x a y (pri pevných číslach a a b), ktorých príklady (pre zvolené a, b) sú vykreslené[1] na obr. 1, vidíme (s ohľadom na uhly, ktoré zvierajú dotyčné polpriamky so súradnicovými osami), že v prípade, keď obe čísla a, b sú *nekladné*, nemá zadaná sústava rovníc žiadne riešenie s výnimkou prípadu $a = b = 0$, keď je riešenie jediné ($x = y = 0$).

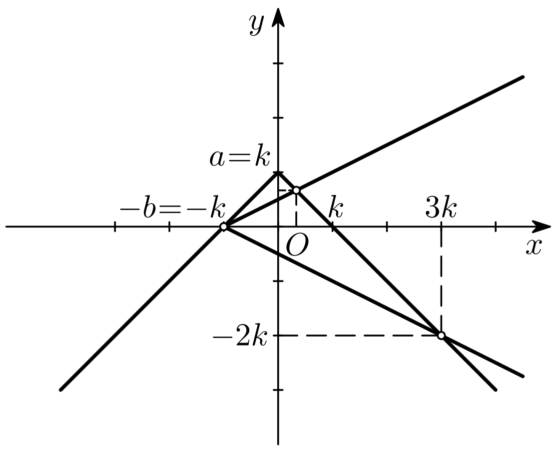


Obr. 1

Ďalej vidíme, že v prípade $a > 0$, $b \leqq 0$ má sústava nanajvýš dve riešenia, rovnako ako v prípade $a \leqq 0$, $b > 0$.[2] Napokon vo zvyšnom prípade $a > 0$, $b > 0$ nie je ťažké usúdiť, že sústava bude mať práve tri riešenia jedine vtedy, keď grafy oboch závislostí budú mať jednu zo vzájomných polôh znázornených na obrázkoch 2 a 3. Na nich sú



Obr. 2



Obr. 3

vyjadrené aj zodpovedajúce čísla a a b pomocou kladného parametra k. Tri spoločné

[1] Keď budeme meniť hodnoty parametrov a a b, budú sa oba grafy posúvať v smere príslušnej súradnicovej osi. Predstava týchto dvoch (navzájom nezávislých) pohybov nás oprávňuje k záverom o možných vzájomných polohách oboch grafov, a ďalej ich v tomto riešení uvádzame bez ďalšieho vysvetľovania.

[2] Pre každý z oboch prípadov sami nakreslite situácie, keď sústava má 0, 1, alebo 2 riešenia.

body oboch grafov sú na oboch obrázkoch vyznačené prázdnymi krúžkami; ich súradnice (x, y), ktoré ľahko dopočítame, sú potom hľadanými trojicami riešení zadanej sústavy.

Záver. Daná sústava rovníc má práve tri riešenia pre každú dvojicu parametrov $(a, b) = (k, 2k)$ a pre každú dvojicu parametrov $(a, b) = (k, k)$, pričom k je ľubovoľné kladné reálne číslo. V prvom prípade má daná sústava riešenie $(0, k)$, $(-\frac{4}{3}k, -\frac{1}{3}k)$ a $(4k, -3k)$. V druhom prípade má daná sústava riešenie $(-k, 0)$, $(\frac{1}{3}k, \frac{2}{3}k)$ a $(3k, -2k)$.

Iné riešenie. I keď je predchádzajúca grafická metóda riešenia z hľadiska matematickej exaktnosti plnohodnotná a podané riešenie možno tak oprávnene hodnotiť ako úplné, uveďme pre porovnanie aj prácnejší algebraický postup.

Ako zvyčajne sa zbavíme absolútnych hodnôt v zadaných rovniciach rozlíšením štyroch prípadov a v každom z nich zodpovedajúcu sústavu dvoch lineárnych rovníc rutinným postupom najskôr vyriešime v celom obore $\mathbb{R}$ (nehľadiac teda zatiaľ na podmienky vymedzujúce daný prípad):

$$\begin{array}{llll}
(1) & x \geqq 0,\ y \geqq 0: & x_1 = \frac{1}{3}(2a - b), & y_1 = \frac{1}{3}(a + b),\\
(2) & x \geqq 0,\ y < 0: & x_2 = 2a + b, & y_2 = -a - b,\\
(3) & x < 0,\ y \geqq 0: & x_3 = -2a + b, & y_3 = -a + b,\\
(4) & x < 0,\ y < 0: & x_4 = \frac{1}{3}(-2a - b), & y_4 = \frac{1}{3}(a - b).
\end{array}$$

Keďže jednotlivé prípady (1) – (4) sa navzájom vylučujú, je našou úlohou zistiť, pre aké dvojice (a, b) práve tri z nájdených dvojíc (x_i, y_i) spĺňajú príslušnú podmienku, ktorá daný prípad vymedzuje. Kvôli prehľadnosti ďalšieho výkladu uveďme, že najskôr vysvetlíme, prečo nevyhovujú jednotlivé situácie $a < 0$, $b < 0$, $a = 0$, $b = 0$ (stačí vždy ukázať dva z prípadov (1) – (4), ktoré sú vylúčené), a potom sa budeme venovať zvyšnej situácii, keď platí $a > 0$ a zároveň $b > 0$.

Ak je $a < 0$, z rovnice $|x| + y = a$ vyplýva $y < 0$, čo vylučuje prípady (1) a (3). Ak je $b < 0$, z rovnice $2|y| - x = b$ vyplýva $x > 0$, čo vylučuje prípady (3) a (4).

V situácii, keď $a = 0$, vypíšeme pre jednotlivé prípady podmienky na číslo b, za ktorých dvojica (x_i, y_i) vymedzujúcej podmienke vyhovuje:

$$(1)\colon\ b = 0, \quad (2)\colon\ b > 0, \quad (3)\colon\ b \in \emptyset, \quad (4)\colon\ b > 0.$$

Vidíme, že sústava má nanajvýš dve riešenia. Podobné podmienky na číslo a v situácii $b = 0$ vyzerajú takto:

$$(1)\colon\ a \geqq 0, \quad (2)\colon\ a > 0, \quad (3)\colon\ a \in \emptyset, \quad (4)\colon\ a \in \emptyset,$$

preto aj teraz má sústava nanajvýš dve riešenia.

V poslednej situácii, keď platí $a > 0$ a $b > 0$, najskôr vypíšeme, ktoré z hodnôt x_i a y_i majú „príslušné“ znamienka automaticky:

$$y_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad y_2 < 0, \quad x_4 < 0.$$

(To mimochodom znamená, že dvojica (x_2, y_2) je vždy riešením). O príslušnosti znamienok ostatných hodnôt x_i a y_i zrejme rozhoduje, ako veľké je (kladné) číslo b v porovnaní s (kladnými) číslami a a $2a$ (pre ktoré platí $a < 2a$). Možné porovnania teraz rozlíšime a pri každom z nich vypíšeme, ktoré z prípadov (1) – (4) vedú k riešeniu:

(i) $b < a$: vyhovujú prípady (1) a (2).
(ii) $b = a$: vyhovujú prípady (1), (2) a (3).
(iii) $a < b < 2a$: vyhovujú prípady (1), (2), (3), (4).
(iv) $b = 2a$: vyhovujú prípady (1), (2) a (4).
(v) $2a < b$: vyhovujú prípady (2) a (4).

Zisťujeme tak, že zadaná sústava rovníc má práve tri riešenia jedine vtedy, keď platí $b = a > 0$ alebo $b = 2a > 0$; výpis týchto riešení dostaneme zo vzorcov pre hodnoty x_i a y_i. Ak dosadíme $b = a$ do príslušných z nich, dostaneme v prvom prípade trojicu riešení

$$(x_1, y_1) = \left(\tfrac{1}{3}a, \tfrac{2}{3}a\right),\ (x_2, y_2) = (3a, -2a),\ (x_3, y_3) = (-a, 0);$$

pre druhý prípad dostaneme podobným dosadením $b = 2a$ trojicu

$$(x_1, y_1) = (0, a),\ (x_2, y_2) = (4a, -3a),\ (x_4, y_4) = \left(-\tfrac{4}{3}a, -\tfrac{1}{3}a\right).$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V karteziánskej sústave súradníc Oxy znázornite množinu všetkých bodov v rovine, ktorých súradnice $[x, y]$ vyhovujú rovnostiam

a) $|x| - y = 1$, b) $x + |y| = 2$, c) $|x| + |y| = 3$, d) $|x + y| + |x - y| = 4$, e) $\big||x + 1| - 1\big| = y$,
f) $\big||y - 1| + 1\big| = x - 1$.

N2. Určte všetky hodnoty reálneho parametra a, pre ktoré má sústava rovníc

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1, \\ x - 2y &= a. \end{aligned}$$

riešenie v obore reálnych čísel. Uveďte diskusiu vzhľadom na parameter a. [Z grafov oboch vzťahov vyplýva, že daná sústava rovníc má riešenie pre každé $a \in \langle -2; 2\rangle$. Pre $a = -2$ a $a = 2$ má sústava práve jedno riešenie, postupne $(0; 1)$ a $(0; -1)$. Pre každé $a \in (-2; 2)$ má daná sústava práve dve riešenia.]

D1. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc s neznámymi x, y

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ |x| + y &= a, \end{aligned}$$

pričom a je reálny parameter. Uveďte diskusiu vzhľadom na parameter a. [16–C–II–4]

D2. Použitím grafickej metódy a ďalej potom výpočtom určte všetky reálne riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} |x| + |y - 1| &= 1, \\ |x - 1| + |y| &= p, \end{aligned}$$

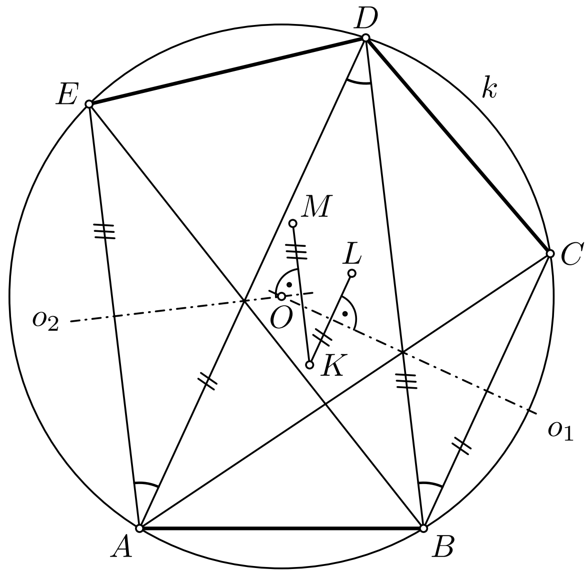
pričom p je reálny parameter. [13–A–II–3]

---

3. *Na kružnici k sú zvolené body A, B, C, D, E (v tomto poradí) tak, že platí $|AB| = |CD| = |DE|$. Dokážte, že ťažiská trojuholníkov ABD, ACD a BDE ležia na kružnici sústrednej s kružnicou k.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Vzhľadom na podmienky úlohy je $|\measuredangle CBD| = |\measuredangle ADB| = |\measuredangle EAD|$, pretože všetky tri uvažované uhly vytínajú na kružnici k zhodné tetivy. Keďže $|\measuredangle CBD| = |\measuredangle ADB|$, je $AD \parallel BC$.

Tetivový štvoruholník $ABCD$ je teda rovnoramenný lichobežník či pravouholník, v ktorom sú (zhodné) trojuholníky DAB a ADC súmerne združené podľa spoločnej osi o_1 strán AD, BC. Tá však prechádza stredom O kružnice k. V uvedenej súmernosti si tak zodpovedajú aj ťažiská K a L oboch zhodných trojuholníkov DAB a ADC (obr. 4). Os úsečky KL teda prechádza stredom O kružnice k. Navyše oba body K a L sú rôzne, pretože zodpovedajúce si ťažnice z (rôznych) vrcholov B a C sa pretínajú v strede spoločnej strany AD oboch zhodných trojuholníkov, zatiaľ čo ťažiská sú vnútornými bodmi oboch úsečiek.



Obr. 4

Analogicky dokážeme, že aj $ABDE$ je rovnoramenný lichobežník či pravouholník. Pre ťažiská K, M zhodných trojuholníkov DAB a BED preto platí, že aj os úsečky KM prechádza stredom O kružnice k. Odtiaľ $|OL| = |OK| = |OM| > 0$ (body K a L sú rôzne), takže ťažiská všetkých troch uvažovaných trojuholníkov ležia na kružnici sústrednej s k. Tým je dôkaz ukončený.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte tvrdenie: Ramená dvoch uhlov, ktorých vrcholy ležia na jednej kružnici, vytínajú na tejto kružnici zhodné tetivy práve vtedy, keď sú oba uhly zhodné. [Využite vzťah medzi obvodovým a stredovým uhlom.]

N2. Os vnútorného uhla pri vrchole C v trojuholníku ABC pretína jemu opísanú kružnicu v bode, ktorý je stredom toho jej oblúka, ktorý neobsahuje bod C. Dokážte. [Využite výsledok predošlého tvrdenia.]

N3. Daný je tetivový päťuholník $ABCDE$, v ktorom $|AE| = |AB|$ a $|BC| = |DE|$. Dokážte, že priesečníky výšok (ortocentrá) trojuholníkov BCD, CDE a bod A sú vrcholmi rovnoramenného trojuholníka. [Dokážte, že $BCDE$ je rovnoramenný lichobežník či pravouholník, a využite osovú súmernosť daného päťuholníka podľa spoločnej osi úsečiek BE a CD.]

---

4. *Nájdite všetky osemciferné čísla* $*2*0*1*6$ *so štyrmi neznámymi nepárnymi ciframi vyznačenými hviezdičkami, ktoré sú deliteľné číslom 2 016.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Keďže $2\,016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, hľadáme práve tie čísla $n = \overline{a2b0c1d6}$ s nepárnymi ciframi a, b, c a d, ktoré sú zároveň deliteľné číslami $32 = 2^5$, $9 = 3^2$ a 7.

Číslo $n = \overline{a2b0c1d6}$ je deliteľné číslom 32 práve vtedy, keď je číslom 32 deliteľné jeho posledné päťčíslie

$$\overline{0c1d6} = 1\,000c + 100 + 10d + 6 = 32(31c + 3) + 8(c + d + 1) + 2(d + 1).$$

Podľa deliteľnosti ôsmimi vidíme, že číslo $d+1$ musí byť deliteľné štyrmi, a tak je buď $d=3$, alebo $d=7$. V prípade $d=3$ je naše päťčíslie rovné $32(31c+3)+8(c+5)$, takže je deliteľné 32 práve vtedy, keď je číslo $c+5$ deliteľné 4, teda $c \in \{3,7\}$. V prípade $d=7$ je však ono päťčíslie rovné $32(31c+3)+8(c+10)$, takže nie je deliteľné 32, pretože c je nepárna cifra, a tak je číslo $c+10$ nepárne, čiže číslo $8(c+10)$ nie je deliteľné 32. Podmienku deliteľnosti číslom 32 tak spĺňajú práve tie n, ktoré za dvojicu nepárnych cifier (c,d) majú $(3,3)$ alebo $(7,3)$.

Číslo $n = \overline{a2b0c1d6}$ je deliteľné deviatimi práve vtedy, keď je číslom 9 deliteľný jeho ciferný súčet

$$a+2+b+0+c+1+d+6 = a+b+c+d+9.$$

Z toho dostaneme možné hodnoty súčtu $a+b$ pre obe už určené dvojice (c,d). Vezmeme pritom navyše do úvahy, že súčet $a+b$ musí byť číslo párne, pretože obe cifry a a b sú nepárne. Pre prvú dvojicu $(c,d)=(3,3)$ tak vychádza $a+b=12$, teda $\{a,b\}=\{3,9\}$ alebo $\{5,7\}$. Pre druhú dvojicu $(c,d)=(7,3)$ dostaneme $a+b=8$, teda buď $\{a,b\} = \{1,7\}$, alebo $\{a,b\}=\{3,5\}$. Prichádzame k záveru, že iba osem čísel požadovaného tvaru je deliteľných oboma číslami 32 a 9. Jedná sa o čísla

$$32\,903\,136,\ 92\,303\,136,\ 52\,703\,136,\ 72\,503\,136,$$
$$12\,707\,136,\ 72\,107\,136,\ 32\,507\,136,\ 52\,307\,136.$$

Deliteľnosť posledným činiteľom 7 tak ostáva posúdiť iba pri týchto ôsmich kandidátoch na riešenie našej úlohy. Je jednoduché sa presvedčiť, že iba prvé a posledné z vypísaných čísel sú deliteľné siedmimi. Možno to spraviť rýchlo priamym delením (ak máme po ruke kalkulačku), alebo namiesto toho využiť menej známe kritérium deliteľnosti siedmimi, podľa ktorého akékoľvek osemciferné číslo

$$\overline{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = a_0 + a_1\cdot 10^1 + a_2\cdot 10^2 + a_3\cdot 10^3 + a_4\cdot 10^4 + a_5\cdot 10^5 + a_6\cdot 10^6 + a_7\cdot 10^7$$

dáva po delení siedmimi taký istý zvyšok ako súčet

$$s = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7.$$

(Koeficient pri každej cifre a_k je rovný zvyšku po delení siedmimi prislúchajúcej mocniny 10^k.)

Odpoveď. Vyhovujú práve dve čísla 32 903 136 a 52 307 136.

NÁVODNÉ A DOPĹŇAJÚCE ÚLOHY:

N1. Známe kritériá deliteľnosti číslami 2, 4 a 8 zovšeobecnite na kritérium deliteľnosti číslom 2^k pre ľubovoľné prirodzené číslo k: Celé číslo zapísané v desiatkovej sústave je deliteľné číslom 2^k práve vtedy, keď je také jeho posledné k-číslie. [Rozdiel čísla a jeho posledného k-číslia je číslo, ktorého zápis končí k nulami, takže je deliteľné číslom 10^k, a teda aj číslom 2^k. To znamená, že akékoľvek číslo a jeho posledné k-číslie dávajú po delení číslom 2^k vždy taký istý zvyšok.]

N2. Pripomeňte si známy poznatok, že dané prirodzené číslo a jeho ciferný súčet dávajú rovnaké zvyšky ako po delení tromi, tak po delení deviatimi. Platí to aj po delení číslom $3^3 = 27$? [Neplatí, napríklad číslom 27 je deliteľné samo číslo 27, avšak jeho ciferný súčet $2+7=9$ číslom 27 deliteľný nie je. Neplatí ani opačná implikácia: napríklad číslo 1 899 s ciferným súčtom 27 týmto číslom deliteľné nie je.]

D1. Dokážte, že o deliteľnosti siedmimi akéhokoľvek čísla N zapísaného v desiatkovej sústave možno rozhodovať pomocou „kódu“ 132645 takto: Šesťciferné číslo $N = \overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ dáva po delení siedmimi taký istý zvyšok ako súčet

$$s = 1a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5$$

(cifry vypisujeme odzadu a pred ne ako koeficienty pripisujeme jednotlivé cifry onoho kódu). Ak má číslo N menej ako šesť cifier, napíšeme príslušný kratší súčet, ak má číslo N naopak viac ako šesť cifier, kódové cifry opakujeme s periódou 6, teda

$$s = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + \ldots$$

D2. Dokážte, že pre každé celé číslo n je číslo, ktoré dostaneme, keď zapíšeme 3^n jednotiek za sebou, násobkom čísla 3^n. [Použite matematickú indukciu: pre $n = 1$ (aj pre $n = 2$) tvrdenie zrejme platí (použite ciferný súčet). Pri druhom indukčnom kroku si všimnite, že číslo z 3^{n+1} jednotiek je násobkom čísla z 3^n jednotiek, pritom príslušný podiel je číslo tvaru $10\ldots010\ldots01$, teda číslo deliteľné tromi (má totiž ciferný súčet 3).]

---

5. *Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Označme D pätu jeho výšky z vrcholu C a M, N priesečníky osí uhlov ADC, BDC so stranami AC, BC. Dokážte, že platí*

$$2|AM| \cdot |BN| = |MN|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

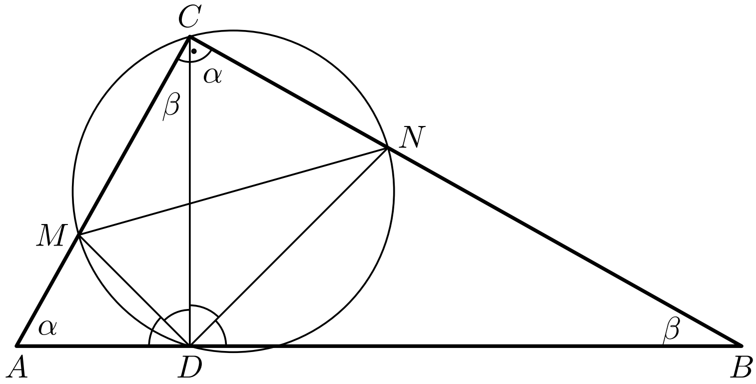
Riešenie. Osi DM a DN pravých uhlov pri vrchole D spolu s výškou CD rozdeľujú priamy uhol pri vrchole D na štyri zhodné uhly veľkosti 45°. Zároveň vidíme, že uhol MDN je pravý, takže body C, M, D, N ležia na Tálesovej kružnici s priemerom MN.

Ak označíme zvyčajným spôsobom uhly pri vrcholoch A a B trojuholníka ABC, je zároveň $|\measuredangle ACD| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\measuredangle BCD| = 90° - \beta = \alpha$ (obr. 5). Z toho vyplýva podobnosť trojuholníkov $CDM \sim BDN$ a $ADM \sim CDN$, takže

$$\frac{|MD|}{|ND|} = \frac{|CM|}{|BN|} \quad \text{a} \quad \frac{|MD|}{|ND|} = \frac{|AM|}{|CN|}.$$

Porovnaním pravých strán dostaneme

$$|AM| \cdot |BN| = |CM| \cdot |CN|. \tag{1}$$



Obr. 5

Keďže obvodové uhly nad tetivami CM a CN sú zhodné, je $|CM| = |CN|$. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom (rovnoramennom) trojuholníku CMN tak dostaneme

$$2|CM|^2 = |CM|^2 + |CN|^2 = |MN|^2$$

a dosadením do rovnosti (1) vyjde

$$2|AM| \cdot |BN| = 2|CM| \cdot |CN| = 2 \cdot |CM|^2 = |MN|^2.$$

Tým je tvrdenie úlohy dokázané.

Poznámka. Ukážeme ešte jeden spôsob odvodenia kľúčovej rovnosti (1). Pravouhlé trojuholníky ACD a CBD sú podobné, pretože $|\measuredangle BCD| = 90° - |\measuredangle ACD| = |\measuredangle CAD|$. To však znamená, že osi DM a DN oboch vnútorných uhlov z vrcholu D, ktoré si v tejto podobnosti zodpovedajú, delia protiľahlé strany v rovnakom pomere. Platí teda

$$|AM| : |CM| = |CN| : |BN|, \quad \text{t. j.} \quad |AM| \cdot |BN| = |CM| \cdot |CN|.$$

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zopakujte si základné vlastnosti a vzťahy medzi *obvodovým*, *stredovým* a *úsekovým* uhlom a ďalej metódy (postupy), ako ukázať, že štyri a viac bodov leží na jednej kružnici. [Možno doporučiť o. i. časopis Matematika – Fyzika – Informatika (`mfi.upol.cz`), roč. 24, č. 5, článok „Čtyři body na kružnici".]

N2. Dokážte, že tetivy jednej kružnice prislúchajúce zhodným obvodovým uhlom sú zhodné. [Použite sínusovú vetu.]

N3. Daný je pravouhlý trojuholník ABC, v ktorom D označuje pätu výšky z vrcholu C na jeho preponu AB. Ďalej nech K, L sú body na jeho odvesnách postupne BC, AC, pre ktoré platí $2|BK| = |CK|$ a $2|CL| = |AL|$. Dokážte, že body K, C, L a D ležia na jednej kružnici. [Využite podobnosť pravouhlých trojuholníkov ADC a CDB, z ktorej potom vyplýva aj podobnosť trojuholníkov CLD a BKD.]

D1. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB. Označme D pätu výšky z vrcholu C. Nech Q, R a P sú postupne stredy úsečiek AD, BD a CD. Dokážte, že platí

$$|\measuredangle APB| + |\measuredangle QCR| = 180°.$$

[65–CPS juniorov–T1]

---

6. *Určte všetky reálne čísla r také, že nerovnosť $a^3 + ab + b^3 \geqq a^2 + b^2$ platí pre všetky dvojice reálnych čísel a, b, ktoré sú väčšie alebo rovné r.* (Ján Mazák)

Riešenie. Keďže

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

môžeme danú nerovnosť prepísať na ekvivalentný tvar

$$(a + b - 1)(a^2 - ab + b^2) \geqq 0. \tag{1}$$

Vzhľadom na to, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí

$$a^2 - ab + b^2 = (a - \tfrac{1}{2}b)^2 + \tfrac{3}{4}b^2 \geqq 0$$

(s rovnosťou práve vtedy, keď $a = b = 0$), je nerovnosť (1) splnená práve vtedy, keď

$$a + b \geqq 1 \quad \text{alebo} \quad a = b = 0.$$

Z podmienky $a+b \geqq 1$ tak vyplýva, že nerovnosť (1) je zaručene splnená pre všetky dvojice reálnych čísel a, b, ktoré sú väčšie alebo rovné $\frac{1}{2}$, takže požadovanú vlastnosť má každé $r \geqq \frac{1}{2}$. Nemá ju však žiadne $r < \frac{1}{2}$, pretože k takému r možno zvoliť kladné čísla $a = b = \max(r, \frac{1}{3})$, ktoré sú síce väčšie alebo rovné r, avšak nerovnosť (1) nespĺňajú, lebo pre ne neplatí ani $a + b \geqq 1$, ani $a = b = 0$.

Záver. Danej úlohe vyhovujú práve všetky reálne čísla $r \geqq \frac{1}{2}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre každé nepárne číslo n a pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

N2. Znázornite v karteziánskej sústave súradníc všetky body, ktorých súradnice x, y vyhovujú vzťahom

a) $(x - y \geqq 1) \wedge (2x + y \leqq 1)$,

b) $(\min(x, y) \geqq r) \wedge (\max(x, y) \leqq R)$, pričom $r < R$ sú dané reálne čísla.

N3. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \leqq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Určte, kedy nastáva rovnosť. [64–B–I–6]

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný

Redakčná úprava: Ján Mazák, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016