66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

1. *Na tabuli je napísaných päť navzájom rôznych kladných čísel. Určte najväčší možný počet dvojíc z nich vytvorených, v ktorých je súčet oboch prvkov rovný jednému z piatich čísel napísaných na tabuli.* (*Michal Rolínek*)

Riešenie. Označme $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ kladné čísla napísané na tabuli. Najmenšie čísla a_1 ani a_2 zrejme nemôžu byť súčtom žiadnych dvoch na tabuli napísaných čísel. Číslo a_3 sa dá ako súčet niektorej dvojice dostať nanajvýš jedným spôsobom, a to $a_3 = a_1 + a_2$. Číslo a_4 síce môžeme dostať tromi spôsobmi: $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$ alebo $a_1 + a_3$, ale keďže je $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_3$, môže byť a_4 súčtom nanajvýš jednej z dvojíc $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_2, a_3\}$. Napokon číslo a_5 možno takto získať nanajvýš dvoma spôsobmi. Keby sme totiž a_5 získali tromi spôsobmi ako súčet dvoch čísel napísaných na tabuli, bolo by aspoň jedno z čísel a_1, a_2, a_3, a_4 sčítancom v dvoch rôznych súčtoch, čo nie je možné.

Spolu sme tak zistili, že počet vyhovujúcich dvojíc nikdy neprevýši súčet $0 + 0 + 1 + 1 + 2$, ktorý je rovný štyrom.

Príkladom pätice čísel napísaných na tabuli, pre ktorý súčty štyroch (z nich vytvorených) dvojíc sú tiež na tabuli uvedené, je $a_i = i$ pre $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, keď $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $1 + 4 = 5$ a $2 + 3 = 5$.

Záver. Z daných piatich rôznych kladných čísel možno zostaviť nanajvýš štyri dvojice požadovanej vlastnosti.

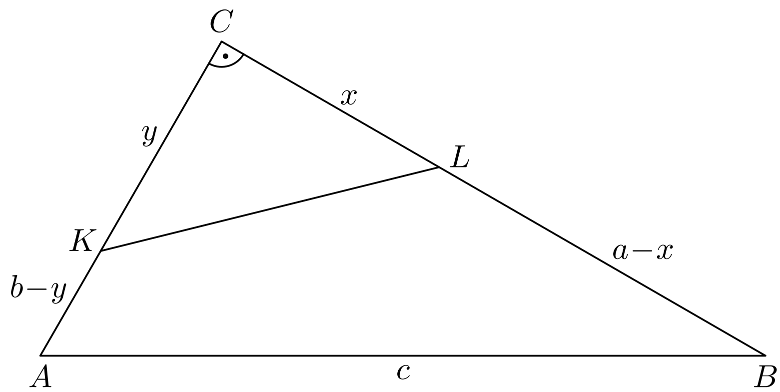
Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za získanie odhadu, že vhodných dvojíc nie je viac ako štyri, dajte 4 body. (Za odhad, že dvojíc je nanajvýš šesť, pretože najväčšie číslo v dvojici byť nemôže, body nedávajte.) Za príklad pätice čísel so štyrmi vyhovujúcimi dvojicami dajte 2 body, a to aj v prípade, že sa riešiteľovi nepodarí horný odhad dokázať.

2. *Na odvesnách AC a BC daného pravouhlého trojuholníka ABC určte postupne body K a L tak, aby súčet*

$$|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2$$

nadobúdal najmenšiu možnú hodnotu a vyjadrite ju pomocou $c = |AB|$.
(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. V súlade s obr. 1 označme $x = |CL|$, $y = |CK|$, potom $|BL| = a - x$, a $|AK| = b - y$, pričom a, b sú postupne dĺžky odvesien BC, AC.



Obr. 1

Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku KLC dostaneme $|KL|^2 = x^2 + y^2$, takže skúmaný súčet môžeme upraviť nasledujúcim spôsobom:

$$\begin{aligned}|AK|^2 + |KL|^2 + |LB|^2 &= (b-y)^2 + x^2 + y^2 + (a-x)^2 = \\ &= 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = \\ &= 2\Big(x - \frac{a}{2}\Big)^2 + 2\Big(y - \frac{b}{2}\Big)^2 + \frac{a^2+b^2}{2} = \\ &= 2\Big(x - \frac{a}{2}\Big)^2 + 2\Big(y - \frac{b}{2}\Big)^2 + \frac{c^2}{2}.\end{aligned}$$

Vďaka nezápornosti druhých mocnín z toho vidíme, že skúmaný výraz nadobúda svoju najmenšiu hodnotu, konkrétne $\frac{1}{2}c^2$, práve vtedy, keď $x = \frac{1}{2}a$ a súčasne $y = \frac{1}{2}b$, teda práve vtedy, keď body K, L sú postupne stredmi odvesien AC, BC daného pravouhlého trojuholníka ABC.

Záver. Najmenšia možná hodnota skúmaného súčtu je rovná $\frac{1}{2}c^2$. Túto hodnotu dostaneme práve vtedy, keď body K, L budú postupne stredmi odvesien AC, BC daného pravouhlého trojuholníka.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za vyjadrenie skúmaného súčtu pomocou dvoch vhodne zvolených parametrov. Za následnú úpravu na tvar s druhými mocninami, z ktorého je hľadaná najmenšia hodnota a tiež príslušná poloha bodov K a L zrejmá, dajte ďalšie 3 body. Za uvedenie správnej odpovedi pre polohu oboch hľadaných bodov K, L a vyjadrenie najmenšej hodnoty skúmaného výrazu pomocou c dajte 1 bod.

---

3. *Napíšeme za sebou 1000 prirodzených čísel, ktoré majú vlastnosti: súčet každých siedmich po sebe zapísaných čísel je 2017, na 123. mieste je číslo 123, na 234. mieste číslo 234 a na 345. mieste číslo 345. Určte súčet štyroch čísel na 456., 567., 678. a 789. mieste.* (Jaroslav Zhouf)

Riešenie. Označme po sebe napísané čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$. Vzhľadom na to, že súčet každých siedmich po sebe napísaných čísel je rovný tomu istému číslu 2 017, porovnaním dvoch takých súčtov so šiestimi spoločnými sčítancami

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+5} + a_{i+6} = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+6} + a_{i+7}$$

dôjdeme k záveru, že rovnosť $a_i = a_{i+7}$ platí pre každý prípustný index i, takže uvažovaná číselná postupnosť (a_i) má periódu dĺžky 7. Platí teda $a_1 = a_8 = a_{15} = \ldots$, $a_2 = a_9 = a_{16} = \ldots$, a pod. Keďže indexy 123, 234, 345, 456, 567, 678, 789 členov tejto postupnosti dávajú v určitom poradí všetkých sedem možných zvyškov po delení siedmimi, je súčet členov s týmito siedmimi indexmi rovný súčtu ľubovoľných siedmich po sebe idúcich členov tejto postupnosti, t. j. 2 017. Z toho už pre $a_{123} = 123$, $a_{234} = 234$ a $a_{345} = 345$ bezprostredne vyplýva

$$a_{456} + a_{567} + a_{678} + a_{789} = 2\,017 - (a_{123} + a_{234} + a_{345}) = 2\,017 - 702 = 1\,315.$$

Záver. Hľadaný súčet je 1 315.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za objav, že postupnosť má periódu dĺžky 7 (aj bez zdôvodnenia zo vzorového riešenia, ktoré možno totiž považovať za zrejmé). Ďalšie 2 body dajte za poznatok, že sedem zadaných indexov má rôzne zvyšky po delení siedmimi, 1 bod potom za jeho dôsledok, že sedem dotyčných členov dáva súčet 2 017, a zvyšný 1 bod dajte za dopočítanie hľadaného súčtu.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe do 20. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Ján Mazák, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Patrik Bak, Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Tomáš Jurík, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017