

66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

Informácia pre krajskú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideluje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

1. Michaela a Jana dnes obe majú narodeniny, dokopy majú 84 rokov. Pritom Michaela má dvakrát viac rokov, ako mala Jana, keď Michaela mala toľko rokov, koľko má Jana dnes. Koľko rokov má Michaela a koľko Jana? (Marta Volfová)

Riešenie. Informácie zo zadania môžeme pomocou jednej neznámej zapísať napr. takto:

	dnes	skôr
Michaela	$2x$	$84 - 2x$
Jana	$84 - 2x$	x

Rozdiel vekov je v oboch riadkoch rovnaký (rozdiel medzi „dnes“ a „skôr“), čo vedie na rovnicu

$$2x - 84 + 2x = 84 - 2x - x,$$

ktorej riešenie je

$$7x = 168,$$

$$x = 24.$$

Z toho dostávame $2x = 48$ a $84 - 2x = 36$, tzn. Michaela má 48 rokov a Jana 36 rokov.

Iné riešenie. Vzťahy zo zadania je možné s viacerými neznámymi vyjadriť napr. takto:

	dnes	skôr
Michaela	$2x$	y
Jana	y	x

Michaela a Jana majú dokopy 84 rokov a rozdiel vekov je v oboch riadkoch rovnaký. To vedie na sústavu dvoch rovníc

$$2x + y = 84,$$

$$2x - y = y - x,$$

ktorá je ekvivalentná sústave

$$4x + 2y = 168,$$

$$3x = 2y.$$

Dosadením druhej rovnice do prvej dostávame

$$\begin{aligned}7x &= 168, \\ x &= 24.\end{aligned}$$

Z toho vyplýva $2x = 48$ a $y = \frac{3}{2} \cdot 24 = 36$, to znamená, že Michaela má 48 rokov a Jana 36 rokov.

Návrh hodnotenia. 2 body za vyjadrenie vzťahov obsiahnutých v úvodnej tabuľke; 2 body za zostavenie a vyriešenie rovnice, resp. sústavy rovníc; po 1 bode za dopočítanie vekov Michaely a Jany.

Poznámka. Za neznámu môže byť zvolený aj rozdiel medzi „dnes“ a „skôr“ alebo rozdiel medzi vekmi Michaely a Jany; v takom prípade by úvodné vzťahy spolu s ostatnými podmienkami viedli na inú sústavu rovníc s obdobným riešením, teda aj hodnotením.

Zo zadania vyplýva, že Michaela je staršia ako Jana a že Michaelin vek je párne číslo. Súčet ich vekov je 84 rokov, takže namiesto uvedeného riešenia rovníc je možné postupne skúšať, ktorá z nasledujúcich možností vyhovuje ostatným požiadavkám zo zadania:

Michaela	44	46	48	...
Jana	40	38	36	...

Takto možno ľahko odhaliť, že vyhovujúca je tretia možnosť. Bez zdôvodnenia, že sa jedná o jedinú možnosť, hodnotte také riešenie nanajvýš 4 bodmi. Za zdôvodnenie jednoznačnosti dajte ďalšie 2 body podľa kvality komentára.

2. *Pred Janom sedeli tri zahalené princezné a Jano mal za úlohu zistiť, ktorá z nich je Zlatovláska.*

Princezná v prvom kresle povedala: „V treťom kresle Zlatovláska nesedí.“

Princezná v druhom kresle povedala: „Ja Zlatovláska nie som.“

Princezná v treťom kresle povedala: „Ja som Zlatovláska.“

Zázračná muška Janovi prezradila, koľko princezien klamalo. Až s touto radou dokázal Jano odhaliť pravú Zlatovlásku. Ktorá z princezien bola Zlatovláska?

(Marta Volfová)

Riešenie. Rozlíšime tri prípady podľa toho, kde mohla sedieť Zlatovláska:

1. Ak by Zlatovláska sedela v prvom kresle, tak by

- princezná v prvom kresle hovorila pravdu,
- princezná v druhom kresle hovorila pravdu,
- princezná v treťom kresle klamala.

2. Ak by Zlatovláska sedela v druhom kresle, tak by

- princezná v prvom kresle hovorila pravdu,
- princezná v druhom kresle klamala,
- princezná v treťom kresle klamala.

3. Ak by Zlatovláska sedela v treťom kresle, tak by

- princezná v prvom kresle klamala,
- princezná v druhom kresle hovorila pravdu,
- princezná v treťom kresle hovorila pravdu.

V prvom a v treťom prípade by klamala jedna princezná, v druhom prípade by klamali dve princezné. Keďže mužská rada Janovi pomohla odhaliť Zlatovlásku, musela mu muška prezradiť, že klamali dve princezné. Tomu zodpovedá druhý prípad, čiže Zlatovláška sedela v druhom kresle. (Ak by muška tvrdila, že klamala jedna princezná, Jano by nedokázal rozhodnúť medzi prvým a tretím prípadom.)

Návrh hodnotenia. 4 body za rozbor všetkých prípadov; 2 body za určenie jediného možného prípadu a umiestnenie Zlatovlásky.

Poznámka. Predchádzajúci rozbor možností možno pojať opačne, t. j. podľa pravdivosti, resp. nepravdivosti jednotlivých výrokov vyvodzovať, kde by mala sedieť Zlatovláška. Takto by sa muselo uvažovať celkom osem prípadov:

- Výroky princezien v prvom a v treťom kresle sú navzájom v rozpore, teda tieto dve princezné nemôžu obe súčasne vraviť pravdu – tým sú vylúčené dva prípady.
- Z rovnakého dôvodu nemôžu princezné v prvom a v treťom kresle obe súčasne klamať – tým sú vylúčené ďalšie dva prípady.
- Nie je možné, aby súčasne princezná v druhom kresle klamala a princezná v treťom kresle hovorila pravdu (to by boli obe Zlatovlásky) – tým je vylúčený ďalší prípad.

Zvyšné tri prípady zodpovedajú práve prípadom v uvedenom riešení.

3. *Veliteľ zvolal ostatných obrancov hradu a rozhodol, ako sa rozdelia o svoju odmenu:*

„Prvý si vezme jeden dukát a sedminu zvyšku, druhý si vezme dva dukáty a sedminu nového zvyšku a tak ďalej. Teda n -tý obranca si vezme n dukátov a k tomu ešte sedminu zo zvyšného množstva dukátov, pokiaľ nejaké budú.“

Takto sa podarilo rozdeliť všetky dukáty a pritom všetci obrancovia dostali rovnako. Koľko obrancov sa delilo o odmenu? (Marta Volfová)

Riešenie. Označme počet obrancov p a uvažujme odzadu. Posledný p -ty obranca si vzal p dukátov, a tým boli rozobrané všetky dukáty. Predposledný $(p - 1)$ -ty obranca si vzal $p - 1$ dukátov a sedminu aktuálneho zvyšku, ktorý označme z . Keďže obaja obrancovia dostali rovnako, platí

$$p - 1 + \frac{1}{7} \cdot z = p. \quad (1)$$

Z toho dostávame $\frac{1}{7} \cdot z = 1$, teda $z = 7$. Súčasne však platí, že posledný obranca mal k dispozícii šesť sedmín tohto zvyšku. To znamená, že

$$p = \frac{6}{7} \cdot z, \quad (2)$$

teda $p = 6$. Ak sa obrancovia rozdelili o všetky dukáty a všetci dostali rovnako, muselo ich byť šesť, každý dostal šesť dukátov, všetkých dukátov preto bolo $6 \cdot 6 = 36$. Keďže sme doposiaľ uvažovali len niektoré informácie zo zadania, je nutné overiť, že také

delenie je naozaj možné:

	vzal	zostalo
prvý	$1 + \frac{1}{7}(36 - 1) = 6$	$36 - 6 = 30$
druhý	$2 + \frac{1}{7}(30 - 2) = 6$	$30 - 6 = 24$
tretí	$3 + \frac{1}{7}(24 - 3) = 6$	$24 - 6 = 18$
štvrtý	$4 + \frac{1}{7}(18 - 4) = 6$	$18 - 6 = 12$
piaty	$5 + \frac{1}{7}(12 - 5) = 6$	$12 - 6 = 6$
šiesty	$6 + \frac{1}{7}(6 - 6) = 6$	$6 - 6 = 0$

O odmenu sa delilo šesť obrancov.

Návrh hodnotenia. 3 body za vzťah (1) a určenie $z = 7$; 2 body za vzťah (2) a výsledok $p = 6$; 1 bod za overenie.

Iné riešenie. Označme počet všetkých dukátov l a uvažujme odpredu. Prvý obranca si vzal jeden dukát a sedminu zvyšku, teda si vzal

$$1 + \frac{1}{7}(l - 1) = \frac{1}{7}(l + 6) \quad (3)$$

dukátov a počet dukátov sa tak zmenšil na $\frac{6}{7}(l - 1)$. Druhý obranca si vzal dva dukáty a sedminu nového zvyšku, teda si vzal

$$2 + \frac{1}{7}\left(\frac{6}{7}(l - 1) - 2\right) = \frac{1}{49}(6l + 78) \quad (4)$$

dukátov. Keďže obaja obrancovia dostali rovnako, platí

$$\frac{1}{7}(l + 6) = \frac{1}{49}(6l + 78). \quad (5)$$

Z toho dostávame

$$\begin{aligned} 7l + 42 &= 6l + 78, \\ l &= 36. \end{aligned}$$

Rozpísaním ako v tabuľke pri predchádzajúcom postupe sa overí, že sme našli vyhovujúce riešenie a že obrancov bolo šesť.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za vzťah (3), resp. (4) a jeho prípadnú úpravu; 2 body za zostavenie a vyriešenie rovnice (5); 2 body za overenie a výsledok.

Iné riešenie. Označme počet obrancov p . Posledný p -ty obranca si vzal p dukátov, a tým boli rozobrané všetky dukáty. Všetci obrancovia dostali rovnako, každý preto dostal p dukátov. Obrancovia sa teda delili celkom o p^2 dukátov.

Prvý obranca si vzal jeden dukát a sedminu zvyšku, takže platí

$$1 + \frac{1}{7}(p^2 - 1) = p, \quad (6)$$

čiže

$$p^2 - 1 = 7(p - 1).$$

Ľavú stranu v tejto rovnici možno vyjadriť ako $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$. Zo zadania vyplýva, že $p > 1$, teda $p - 1 > 0$ a predchádzajúca rovnica je ekvivalentná s rovnicou

$$p + 1 = 7,$$

čiže $p = 6$. Rozpísaním ako v tabuľke pri prvom postupe sa overí, že sme našli vyhovujúce riešenie. O odmenu sa delilo šesť obrancov.

Návrh hodnotenia. 2 body za vyjadrenie počtu všetkých dukátov pomocou p ; 3 body za zostavenie a vyriešenie rovnice (6); 1 bod za overenie.

S poznatkom o počte všetkých dukátov možno skúšaním zistiť, že najmenšie p , pre ktoré sa dajú dukáty rozdeliť podľa uvedených pravidiel, je $p = 6$. Také riešenie bez zdôvodnenia, že sa jedná o jedinú možnosť, hodnotíte nanajvýš 4 bodmi. Za zdôvodnenie jednoznačnosti dajte ďalšie 2 body podľa kvality komentára.

Iné riešenie. Označme počet všetkých dukátov l . Prvý obranca si vzal jeden dukát a sedminu zvyšku, takže onen zvyšok $l - 1$ musel byť deliteľný siedmimi. Číslo l je preto tvaru

$$l = 7k + 1 \tag{7}$$

pre nejaké kladné celočíselné k . Prvý obranca si teda vzal

$$1 + \frac{1}{7}(l - 1) = 1 + k$$

dukátov. Všetci obrancovia dostali rovnako a posledný dostal práve toľko dukátov, aké bolo jeho poradové číslo. To znamená, že obrancov bolo $k + 1$ a každý dostal $k + 1$ dukátov, celkom sa tak delili o

$$l = (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 \tag{8}$$

dukátov. Porovnaním (7) a (8) dostávame rovnicu

$$7k + 1 = k^2 + 2k + 1, \tag{9}$$

čiže $5k = k^2$. Zo zadania vyplýva, že obrancovia boli aspoň dvaja, teda $k > 0$ a predchádzajúca rovnica je ekvivalentná s $k = 5$. Rozpísaním ako v tabuľke pri prvom postupe sa overí, že sme našli vyhovujúce riešenie. O odmenu sa delilo šesť obrancov.

Návrh hodnotenia. 1 bod za vzťah (7); 2 body za vzťah (8); 2 body za zostavenie a vyriešenie rovnice (9); 1 bod za overenie.

S poznatkom (7) možno skúšaním zistiť, že najmenšie k , pre ktoré sa dajú dukáty rozdeliť podľa uvedených pravidiel, je $k = 5$. Také riešenie bez zdôvodnenia, že sa jedná o jedinú možnosť, hodnotíte nanajvýš 4 bodmi. Za zdôvodnenie jednoznačnosti dajte ďalšie 2 body podľa kvality komentára.

4. V rovnoramennom trojuholníku ABC je základňa AB dlhá 6 cm a uhol BCA má veľkosť 45° . Vypočítajte polomer kružnice opísanej tomuto trojuholníku.

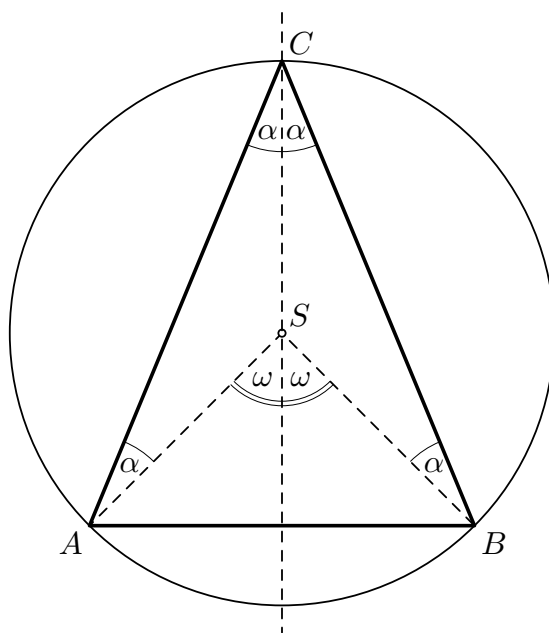
(Lucie Růžicková)

Riešenie. Stred kružnice opísanej trojuholníku ABC označme S . Vzdialenosť stredu S od každého z bodov A , B , C je rovná hľadanému polomeru, ktorý označme r . Trojuholníky ACS , BCS a ABS sú teda rovnoramenné. Najskôr ukážeme, že trojuholník ABS je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole S .

Stred S leží na osi základne AB , ktorá je zároveň osou súmernosti trojuholníka ABC . Rovnoramenné trojuholníky ACS a BCS sú preto zhodné. Potom aj uhly SAC , ACS , SCB a CBS sú navzájom zhodné s veľkosťami

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 45^\circ = 22^\circ 30'. \quad (1)$$

Súčet veľkostí vnútorných uhlov SAC a ACS v trojuholníku ACS je rovný 45° , a to je tiež veľkosť vonkajšieho uhla pri vrchole S (na obr. označeného ω). Tento uhol je polovicou uhla ASB , preto je uhol ASB pravý.



V pravouhlom trojuholníku ABS majú obe odvesny dĺžku r a prepona AB je dlhá 6 cm. Podľa Pytagorovej vety platí

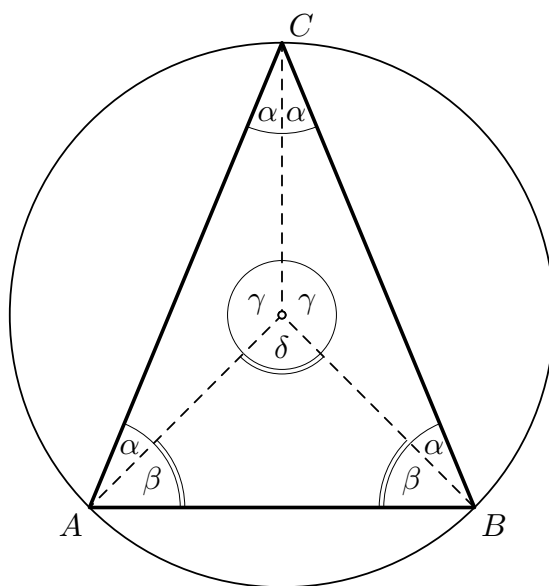
$$r^2 + r^2 = 6^2,$$

teda $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (cm). Kružnica opísaná trojuholníku ABC má polomer $3\sqrt{2}$ cm.

Návrh hodnotenia. 1 bod za poznatok o zhodnosti trojuholníkov ACS a BCS , resp. uhlov SAC , ACS , SCB a CBS ; 3 body za odvodenie, že uhol ASB je pravý; 2 body za výpočet polomeru (za správnu odpoveď považujte ktorúkoľvek z vyššie uvedených hodnôt).

Prvé 4 body dajte aj v prípade, že veľkosť uhla ASB je odvodená s odkazom na vetu o stredovom a obvodovom uhle.

Za použitie Pytagorovej vety v trojuholníku ABS bez zdôvodnenia, prečo je tento trojuholník pravouhlý, dajte nanajvýš 1 bod.

$$\frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67^\circ 30',$$
$$\beta = 67^{\circ}30' - 22^{\circ}30' = 45^{\circ},$$
$$\delta = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ.$$
$$\gamma = 180^\circ - 2 \cdot 22^\circ 30' = 135^\circ,$$
$$\delta = 360^\circ - 2 \cdot 135^\circ = 90^\circ.$$


Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017