66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017

Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z6

---

1. *Jana a Dávid trénujú sčítanie desatinných čísel tak, že každý z nich napíše jedno číslo, a tieto dve čísla potom sčítajú. Posledný príklad im vyšiel 11,11. Dávidovo číslo malo pred desatinnou čiarkou rovnaký počet cifier ako za ňou, Janino číslo tiež. Dávidovo číslo bolo zapísané navzájom rôznymi ciframi, Janino číslo malo práve dve cifry rovnaké. Určte najväčšie možné číslo, ktoré mohol napísať Dávid.* (Michaela Petrová)

Aby bol súčet uvedeného tvaru, nemohlo mať žiadne z čísel pred/za desatinnou čiarkou viac ako dve cifry. Teda ako Janino, tak Dávidovo číslo bolo typu $**,**$ alebo $*,*$. Keďže výsledné číslo malo na mieste stotín nenulovú cifru, muselo mať aspoň jedno z čísel na mieste stotín – a teda aj na mieste desiatok – nenulovú cifru. Keby aj druhé z čísel malo rovnaké vlastnosti, bol by výsledok väčší ako 11,11. Druhé z čísel preto bolo typu $*,*$ a celý príklad môžeme zapísať takto:

$$\begin{array}{r} *\,*,*\,* \\ *,* \\ \hline 1\,1,1\,1 \end{array}$$

Keďže iba prvé číslo má na mieste desiatok a stotín nenulové cifry, musia byť obe tieto cifry 1. Celý príklad potom vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{r} 1\,*,*\,1 \\ *,* \\ \hline 1\,1,1\,1 \end{array}$$

Keďže Dávidovo číslo bolo zapísané navzájom rôznymi ciframi, je prvé číslo Janino a druhé Dávidovo. Zaujíma nás, ktoré najväčšie číslo mohol napísať Dávid, čiže ktoré najmenšie číslo mohla napísať Jana:

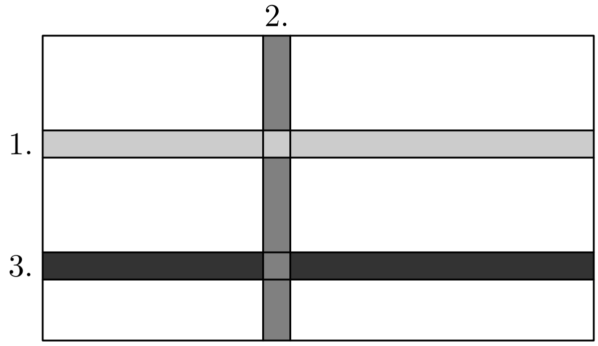
- Najmenšie mysliteľné Janino číslo je 10,01, čo ale nevyhovuje podmienke, že práve dve cifry sú rovnaké.
- Ďalšie mysliteľné Janino číslo je 10,11, čo nevyhovuje z rovnakého dôvodu.
- Ďalšie mysliteľné Janino číslo je 10,21, v tomto prípade by Dávidovo číslo bolo 0,9 a táto možnosť vyhovuje všetkým podmienkam zo zadania.

Najväčšie číslo, ktoré mohol Dávid napísať, bolo číslo 0,9.

---

2. *Pán Kockorád vlastnil záhradu obdĺžnikového tvaru, na ktorej postupne dláždil chodníky z jednej strany na druhú. Chodníky boli rovnako široké, križovali sa na dvoch miestach a už vydláždená plocha sa pri ďalšom dláždení preskakovala. Keď pán Kockorád vydláždil chodník rovnobežný s dlhšou stranou, spotreboval $228\,m^2$ dlažby. Potom vydláždil chodník rovnobežný s kratšou stranou a spotreboval $117\,m^2$ dlažby. Nakoniec vydláždil ešte jeden chodník rovnobežný s prvým chodníkom, tentoraz spotreboval len $219\,m^2$ dlažby. Určte rozmery Kockorádovej záhrady.* (Michaela Petrová)

Načrtneme si, ako Kockorádova záhrada vyzerala (čísla označujú poradie dláždených chodníkov):



Prvý a tretí chodník majú rovnaké rozmery, teda aj rovnakú plochu. Pri treťom chodníku sa spotrebovalo menej dlažby ako pri prvom preto, lebo tretí chodník sa v mieste kríženia s druhým chodníkom nedláždil (tam už bola dlažba položená). Táto spoločná časť druhého a tretieho chodníka je štvorec, ktorého strana zodpovedá šírke chodníka. Na vydláždenie tohto štvorca bolo spotrebovaných

$$228 - 219 = 9\,(\mathrm{m}^2)$$

dlažby. Štvorec s obsahom $9\,\mathrm{m}^2$ má stranu dlhú $3\,\mathrm{m}$, šírka všetkých troch chodníkov je preto rovná $3\,\mathrm{m}$. Z toho a z množstva dlažby použitej na jednotlivé chodníky môžeme určiť rozmery záhrady:

Na prvý chodník sa spotrebovalo $228\,\mathrm{m}^2$ dlažby, čo je skutočný obsah plochy chodníka. Dĺžka záhrady je

$$228 : 3 = 76\,(\mathrm{m}).$$

Na druhý chodník sa spotrebovalo $117\,\mathrm{m}^2$ dlažby, čo je o $9\,\mathrm{m}^2$ menej ako skutočný obsah plochy chodníka (spoločný štvorec s prvým chodníkom bol už vydláždený). Šírka záhrady je

$$(117 + 9) : 3 = 126 : 3 = 42\,(\mathrm{m}).$$

Rozmery Kockorádovej záhrady sú $76\,\mathrm{m}$ a $42\,\mathrm{m}$.

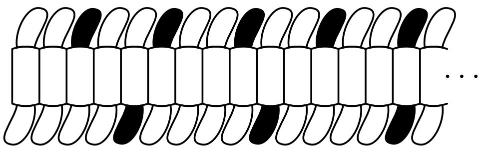
Poznámka. Ak riešiteľ pri výpočte šírky záhrady nepripočíta oných $9\,\mathrm{m}^2$, obdrží chybný rozmer $39\,\mathrm{m}$. Také riešenie hodnoťte nanajvýš stupňom „dobre“.

---

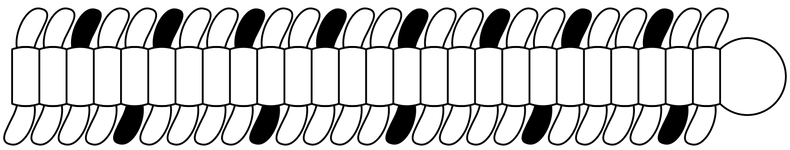
3. *Mnohonožka Mirka pozostáva z hlavy a niekoľkých článkov, na každom článku má jeden pár nôh. Keď sa ochladilo, rozhodla sa, že sa oblečie. Preto si na treťom článku od konca a potom na každom ďalšom treťom článku obliekla ponožku na ľavú nôžku. Podobne si na piatom článku od konca a potom na každom ďalšom piatom článku obliekla ponožku na pravú nôžku. Napokon zistila, že na 14 článkoch jej zostali obe nohy bosé. Zistite, koľko celkom nôh mohla mať mnohonožka Mirka; určte všetky možnosti.*
(*Erika Novotná*)

Nápad. Koľký článok odzadu má ako prvý obe nohy oblečené?

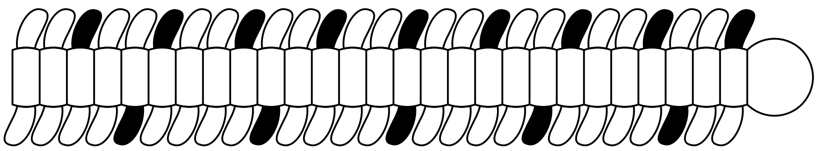
Riešenie. Naznačme niekoľko posledných článkov mnohonožky Mirky (zľava doprava), horný riadok predstavuje ľavé nohy, spodný riadok pravé. Oblečené nohy vyznačujeme čierno, bosé nohy bielo, a to tak dlho, kým nie sú na jednom článku obe nohy oblečené – potom sa vzor opakuje:



Keby mala mnohonožka 15 článkov, boli by na 8 článkoch obe nohy bosé. Pokračujeme ďalej, kým nedostaneme 14 článkov s oboma nohami bosými:



Pokračujeme ďalej, kým je počet článkov s oboma nohami bosými rovnaký:



Mnohonožka Mirka mala buď 26, alebo 27 článkov, teda buď 52, alebo 54 nôh.

---

4. *Štyri rodiny boli na spoločnom výlete. V prvej rodine boli traja súrodenci, a to Alica, Betka a Cyril. V druhej rodine boli štyria súrodenci, a to Dávid, Erika, Filip a Gabika. V tretej rodine boli dvaja súrodenci, a to Hugo a Iveta. Vo štvrtej rodine boli traja súrodenci, a to Ján, Karol a Lukáš. Cestou sa deti rozdelili na skupiny tak, že v každej skupine boli všetky deti s rovnakým počtom bratov a nikto iný. Ako sa mohli deti rozdeliť? Určte všetky možnosti.* (Veronika Hucíková)

Nápad. Spočítajte bratov každého dieťaťa.

Riešenie. V každej skupine sú len deti s rovnakým počtom bratov a počet bratov každého dieťaťa je zo zadania známy. Preto sa deti mohli rozdeliť jediným možným spôsobom. Stačí postupne určiť počty bratov každého dieťaťa a utvoriť zodpovedajúce skupiny.

- Alica a Betka majú jedného brata, Cyril žiadneho.
- Erika a Gabika majú dvoch bratov, Dávid a Filip jedného.
- Iveta má jedného brata, Hugo žiadneho.
- Ján, Karol a Lukáš majú dvoch bratov.

Deti sa teda rozdelili do troch skupín:

- Erika, Gabika, Ján, Karol, Lukáš.
- Alica, Betka, Dávid, Filip, Iveta.
- Cyril, Hugo.

5. *Juro si nakreslil štvorcovú sieť s 25 štvorčekmi, pozri obrázok. Potom chcel každý štvorček vyfarbiť tak, aby rovnako vyfarbené štvorčeky nemali spoločný žiadny vrchol. Koľko najmenej farieb musel Juro použiť?* (Monika Dillingerová)

Nápad. Začnite v niektorom rohovom štvorčeku.

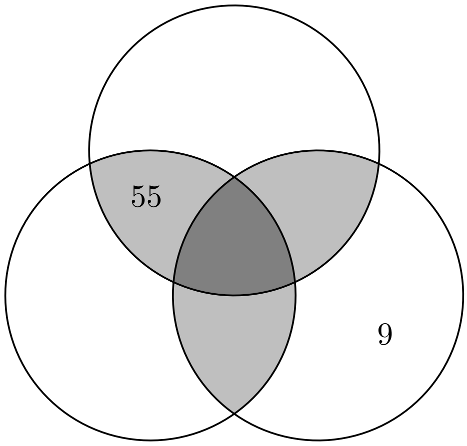
Riešenie. Ak je ľavý horný štvorček vyfarbený nejakou farbou, musia byť okolité tri štvorčeky vyfarbené navzájom rôznymi farbami. Juro musel použiť aspoň 4 farby, ktoré budeme označovať ciframi od 1 do 4:

1	2			
4	3			

Teraz potrebujeme zistiť, či štyri farby stačia na vyfarbenie zvyšku siete podľa uvedených pravidiel, alebo nie. Postupne zistíme, že štyri farby naozaj stačia:

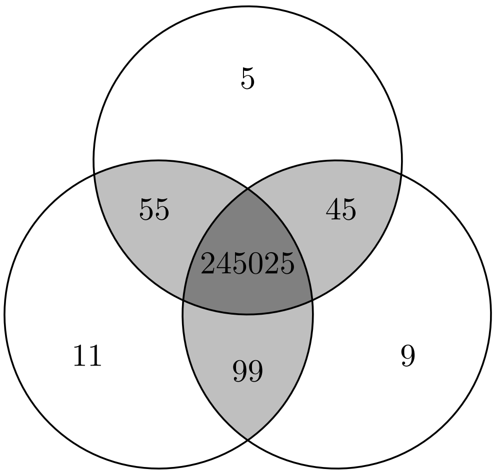
1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1
4	3	4	3	4
1	2	1	2	1

6. *Do prázdnych políčok v nasledujúcom obrázku doplňte celé čísla väčšie ako 1 tak, aby v každom tmavšom políčku bol súčin čísel zo susedných svetlejších políčok.*



(*T. Salčák*)

V nevyplnených bielych políčkach môžu byť napísané iba také dvojice celých čísel, ktorých súčin je 55 a z ktorých každé je väčšie ako 1. Tomu vyhovuje iba dvojica 5 a 11 a tým sú tiež určené čísla v ostatných nevyplnených políčkach: v svetlo sivých políčkach dostávame $9 \cdot 5 = 45$ a $9 \cdot 11 = 99$, v najtmavšom potom $55 \cdot 45 \cdot 99 = 245\,025$.



Poznámka. Čísla 5 a 11 možno do obrázka vyplniť dvojakým spôsobom, čo je v tejto úlohe nepodstatné. Na hodnotenie nemá vplyv, či riešiteľ uvažuje obe možnosti, alebo iba jednu.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, Martin Vodička, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Róbert Hajduk, Ján Mazák, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016