66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

---

1. *Tri kamarátky veveričky spolu vyrazili na zber lieskových orieškov. Ryšavka ich našla dvakrát viac ako Pizizubka a Uška dokonca trikrát viac ako Pizizubka. Cestou domov sa zhovárali a pritom lúskali a jedli svoje oriešky. Pizizubka zjedla polovicu všetkých orieškov, ktoré nazbierala, Ryšavka tretinu všetkých svojich orieškov a Uška štvrtinu tých svojich. Doma veveričky zistili, že im dokopy zvýšilo 196 orieškov. Koľko orieškov našla každá z veveričiek?* (Michaela Petrová)

Nápad. Akú časť všetkých nájdených orieškov doniesli veveričky domov?

Riešenie. Ak množstvo orieškov, ktoré našla Pizizubka, označíme x, tak Ryšavka našla $2x$ orieškov a Uška $3x$ orieškov.

- Pizizubka zjedla polovicu svojich orieškov, zvýšilo jej $\frac{1}{2}x$ orieškov.
- Ryšavka zjedla tretinu svojich orieškov, zvýšilo jej $\frac{2}{3} \cdot 2x = \frac{4}{3}x$ orieškov.
- Uška zjedla štvrtinu svojich orieškov, zvýšilo jej $\frac{3}{4} \cdot 3x = \frac{9}{4}x$ orieškov.

Všetkým veveričkám spolu zvýšilo

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4}\right) x = \frac{49}{12}x$$

orieškov, čo je podľa zadania rovné 196. Takže

$$\begin{aligned} \frac{49}{12}x &= 196, \\ \frac{x}{12} &= 4, \\ x &= 48. \end{aligned}$$

Pizizubka našla 48 orieškov, Ryšavka $2 \cdot 48 = 96$ orieškov a Uška $3 \cdot 48 = 144$ orieškov.

---

2. *Na každej stene pravidelného osemstena je napísané jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8, pričom na rôznych stenách sú rôzne čísla. Pre každú stenu Jaro určil súčet čísla na nej napísaného s číslami troch susedných stien. Takto dostal osem súčtov, ktoré tiež sčítal. Aké hodnoty môže tento výsledný súčet nadobúdať?* (Jaroslav Zhouf)

Nápad. Koľkokrát je každé číslo započítané do celkového súčtu?

Riešenie. Číslo na každej stene je započítané celkom v štyroch čiastočných súčtoch (každá stena sa počíta raz ako prostredná a trikrát ako susedná). Preto je aj vo výslednom súčte každé z čísel započítané štyrikrát. Výsledný súčet teda nadobúda hodnotu

$$4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 4 \cdot 36 = 144,$$

a to nezávisle na tom, ako boli čísla na stenách osemstena napísané.

3. *Pri streľbe z luku sa okrem iného sleduje výkonnosť strelca. Tá sa počíta tak, že sa zo všetkých pokusov odoberie jeden najlepší a jeden najhorší a z hodnotenia zvyšných sa spočíta aritmetický priemer. Kamaráti Peter, Juraj, Michal a Zdeno strieľali po jednom šípe v štyroch kolách. Každá strela bola hodnotená celým číslom od 0 do 10. V každom kole bol súčet hodnotení všetkých chlapcov 32 bodov, ale ani v jednom kole nemali žiadni dvaja chlapci rovnaké hodnotenie. V nasledujúcej tabuľke sú vyplnené iba niektoré údaje z uvedeného zápasu, doplňte tie chýbajúce.*

	1. kolo	*2. kolo*	*3. kolo*	*4. kolo*	*výkonnosť*
Peter				*5*	*10*
Juraj			*9*	*10*	*7,5*
Michal			*5*		*8*
Zdeno					*8,5*
celkom	*32*	*32*	*32*	*32*	–

(*Monika Dillingerová*)

Nápad. Začnite s Petrom.

Riešenie. Keďže výkonnosť Petra bola 10, musel nastrieľať v prvých troch kolách po 10 bodov. Keďže súčet hodnotení v 3. kole bol 32 bodov, musel Zdeno v tomto kole trafiť 8 bodov. Keďže súčet hodnotení v 4. kole bol 32 bodov, musel byť súčet hodnotení Michala a Zdena v tomto kole 17 bodov. Keďže v žiadnom kole nemali žiadni dvaja chlapci rovnaké hodnotenie, mohli mať v tomto kole

a) buď Michal 9 a Zdeno 8 bodov,
b) alebo Michal 8 a Zdeno 9 bodov.

Predpokladajme možnosť a) a pokúsme sa doplniť tabuľku

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnosť
Peter	10	10	10	5	10
Juraj			9	10	7,5
Michal			5	9	8
Zdeno			8	8	8,5
celkom	32	32	32	32	–

Aby výkonnosť Zdena bola $8{,}5 = 17 : 2$, musel v prvých dvoch kolách trafiť po 9 bodov. Aby výkonnosť Michala bola $8 = 16 : 2$ a aby v žiadnom kole nemal rovnaké hodnotenie ako Zdeno, musel v prvých dvoch kolách trafiť po 8 bodov. Aby súčet hodnotení v 1. aj 2. kole bol 32 bodov, musel Juraj v týchto dvoch kolách trafiť po 5 bodov. V takom prípade by však jeho výkonnosť nebola 7,5 (ale iba 7). Možnosť a) preto nemohla nastať.

Predpokladajme možnosť b) a pokúsme sa doplniť tabuľku

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnosť
Peter	10	10	10	5	10
Juraj			9	10	7,5
Michal			5	8	8
Zdeno			8	9	8,5
celkom	32	32	32	32	–

Aby výkonnosť Juraja bola 7,5 = 15 : 2, musel v jednom z prvých dvoch kôl trafiť 6 a v druhom 6 alebo menej bodov. Aby výkonnosť Michala bola 8 = 16 : 2 a aby v žiadnom kole nemal rovnaké hodnotenie ako Peter, musel v jednom z prvých dvoch kôl trafiť 8 a v druhom 8 alebo 9 bodov.

Keby Juraj trafil 6 bodov v rovnakom kole ako Michal 8, tak by Zdeno v rovnakom kole musel trafiť 8 bodov (aby bol súčet hodnotení v tomto kole rovný 32 bodov). To by však Michal a Zdeno mali rovnaké hodnotenie, preto táto možnosť nastať nemohla.

Juraj teda musel trafiť 6 bodov v inom kole ako Michal 8. Predpokladajme, že sa tak stalo v 1. kole a pokúsme sa doplniť tabuľku (z predchádzajúceho vyplýva, že Michal v tom istom kole musel trafiť 9 bodov)

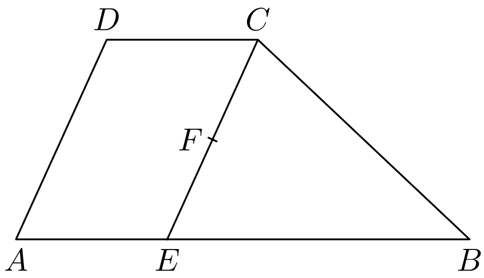
	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnosť
Peter	10	10	10	5	10
Juraj	6		9	10	7,5
Michal	9	8	5	8	8
Zdeno			8	9	8,5
celkom	32	32	32	32	–

Aby súčet hodnotení v 1. kole bol 32 bodov, musel Zdeno v tomto kole trafiť 7 bodov. Aby výkonnosť Zdena bola 8,5 = 17 : 2, musel v druhom kole trafiť 9 bodov. Aby súčet hodnotení v 3. kole bol 32 bodov, musel Juraj v tomto kole trafiť 5 bodov. Keďže 5 je menšie ako 6, súhlasí výkonnosť Juraja so zadaním. Našli sme jedno vyhovujúce riešenie úlohy:

	1. kolo	2. kolo	3. kolo	4. kolo	výkonnosť
Peter	10	10	10	5	10
Juraj	6	5	9	10	7,5
Michal	9	8	5	8	8
Zdeno	7	9	8	9	8,5
celkom	32	32	32	32	–

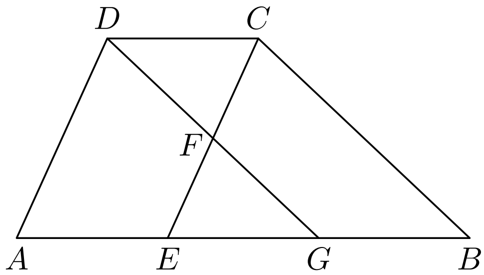
Juraj však mohol trafiť 6 bodov v 2. kole. V takom prípade by výsledná tabuľka mala vymenené hodnotenie pri 1. a 2. kole.

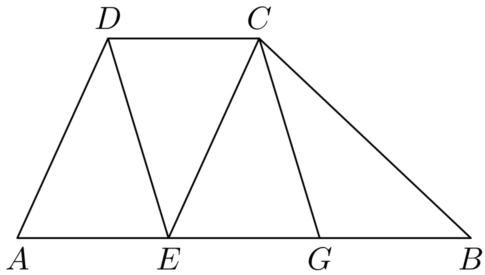
4. *Lichobežník $ABCD$ je úsečkou CE rozdelený na trojuholník a rovnobežník, pozri obrázok. Bod F je stredom úsečky CE, priamka DF prechádza stredom úsečky BE a obsah trojuholníka CDE je $3\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah lichobežníka $ABCD$.*



(*Eva Semerádová*)

Stred úsečky BE, ktorým podľa zadania prechádza priamka DF, označíme G. Úsečka FG je strednou priečkou trojuholníka BCE, ktorá je rovnobežná so stranou BC. Preto štvoruholník $GBCD$ je rovnobežníkom, a teda platí, že úsečky EG, GB, DC a AE sú navzájom zhodné.





Lichobežník $ABCD$ tak môžeme rozdeliť na štyri trojuholníky AED, DCE, EGC a GBC s rovnakým obsahom (prvé tri trojuholníky sú dokonca navzájom zhodné). Obsah lichobežníka je preto rovný štvornásobku obsahu trojuholníka CDE, t. j.

$$4 \cdot 3 = 12\ \mathrm{cm}^2.$$

Poznámka. Trojuholníky DFC a GFE sú zhodné, preto má rovnobežník $AECD$ rovnaký obsah ako trojuholník AGD, a ten je zhodný s trojuholníkom EBC. (V oboch prípadoch možno zhodnosť trojuholníkov zdôvodniť niekoľkými spôsobmi, napr. podľa vety *usu*.) Obsah lichobežníka $ABCD$ je preto rovný dvojnásobku obsahu rovnobežníka $AECD$, a ten je rovný dvojnásobku obsahu trojuholníka CDE.

Z uvedeného tiež vyplýva, že obsah trojuholníka EBC je štvornásobkom obsahu trojuholníka DFC, a ten je rovný polovici obsahu trojuholníka CDE.

5. *Mamička doniesla 10 zákuskov troch druhov: kokosiek bolo menej ako laskoniek a najviac bolo karamelových kociek. Jozef si vybral dva zákusky rôznych druhov, Jakub urobil to isté a na Jána zvýšili iba zákusky rovnakého druhu. Koľko kokosiek, laskoniek a karamelových kociek mamička doniesla?* (*Veronika Hucíková*)

Keď sa k zákuskom dostal Ján, bolo ich 6 rovnakého druhu, a to karamelových kociek – keby to boli kokosky alebo laskonky, muselo by kociek byť viac ako 6 a zákuskov celkom by potom bolo viac ako 10. Preto karamelových kociek pôvodne bolo aspoň 6 a mamička priniesla

- buď 1 kokosku, 3 laskonky a 6 kociek,
- alebo 1 kokosku, 2 laskonky a 7 kociek.

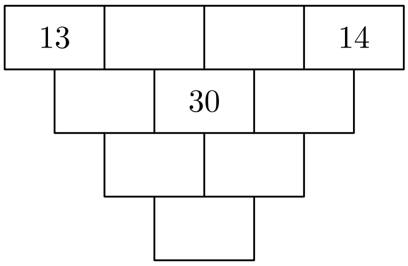
Prvá možnosť nie je vyhovujúca – aby Jozef aj Jakub mali každý dva zákusky rôznych druhov, musel by aspoň jeden z nich vybrať aj kocku, a to by ich potom na Jána neostalo 6.

Druhá možnosť je vyhovujúca – jeden z prvých dvoch chlapcov si vybral kokosku a laskonku, druhý laskonku a kocku, na Jána zvýšilo 6 kociek.

Mamička priniesla 1 kokosku, 2 laskonky a 7 karamelových kociek.

---

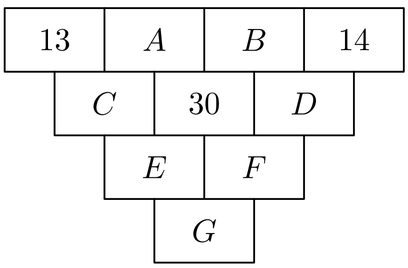
6. *Každá tehlička nasledujúcej pyramídy obsahuje jedno číslo. Kedykoľvek to je možné, je číslo v každej tehličke najmenším spoločným násobkom čísel z dvoch tehličiek ležiacich priamo na nej. Ktoré číslo môže byť v najspodnejšej tehličke? Určte všetky možnosti.*



(*Alžbeta Bohiniková*)

Nápad. Aký je najmenší spoločný násobok troch čísel, z ktorých jedno je deliteľom iného?

Riešenie. Číslo 30 má celkom 8 deliteľov, ktoré môžu byť dosadené za A a B.



Číslo C je najmenším spoločným násobkom 13 a A, číslo E je najmenším spoločným násobkom C a 30, teda E je najmenším spoločným násobkom čísel 13, A a 30. Keďže A je deliteľom čísla 30, je E najmenším spoločným násobkom čísel 13 a 30, t. j. $390 = 13 \cdot 30$.

Podobne možno zdôvodniť, že bez ohľadu na hodnotu B je F najmenším spoločným násobkom čísel $14 = 2 \cdot 7$ a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, t. j. $210 = 7 \cdot 30$.

Číslo G v najspodnejšej tehličke preto môže byť jedine najmenším spoločným násobkom čísel 390 a 210, t. j. $2\,730 = 7 \cdot 13 \cdot 30$.

13	*	*	14
*	30	*	
390	210		
2730			

Poznámka. Keby sme uvažovali všetky možné dvojice čísel, ktorých najmenší spoločný násobok je 30, dostali by sme celkom 27 možností. Doplňaním jednotlivých prípadov za A a B si každý skôr či neskôr všimne, že čísla E, F, a teda aj G sú stále rovnaké.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Patrik Bak, Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, Martin Vodička, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Róbert Hajduk, Ján Mazák, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2016