66. ročník Matematickej olympiády
2016/2017 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7*

<u>*Informácia pre okresnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov. Inými slovami, napr. nepíšte pri žiakovi, že skončil na 2. mieste, ak pred ním skončili traja žiaci s plným počtom bodov a on má o jeden bod menej – v takom prípade mu patrí 4. miesto.

---

1. *Marienka dostala od babičky zázračný mešec, ktorý vždy cez noc zdvojnásoboval množstvo dukátov, ktoré obsahoval. V pondelok Marienka vložila do prázdneho mešca nejaké dukáty. V utorok a v stredu si z mešca vybrala vždy 40 dukátov a nič do neho nevkladala. Vo štvrtok si opäť vybrala 40 dukátov a mešec zostal prázdny. Koľko dukátov vložila Marienka v pondelok do mešca? Koľko dukátov mala do prázdneho mešca vložiť, aby mohla opakovane každý deň vyberať 40 dukátov, nemusela nič vkladať a aby každý deň pred výberom bol počet dukátov v mešci rovnaký?* (Marta Volfová)

Riešenie. 1. Vo štvrtok po výbere 40 dukátov bol mešec prázdny, pred výberom v ňom teda bolo oných 40 dukátov.

V stredu po výbere (pred nočným zdvojnásobením) bolo v mešci $40 : 2 = 20$ dukátov, pred výberom v ňom teda bolo $20 + 40 = 60$ dukátov.

V utorok po výbere bolo v mešci $60 : 2 = 30$ dukátov, pred výberom v ňom teda bolo $30 + 40 = 70$ dukátov.

V pondelok Marienka do mešca vložila $70 : 2 = 35$ dukátov.

2. Aby každý deň pred výberom bol počet dukátov v mešci rovnaký, muselo by nočné zdvojnásobenie vyrovnať výber 40 dukátov. To znamená, že týchto 40 dukátov by muselo byť práve polovicou počtu dukátov pred výberom, teda pred výberom by tam muselo byť 80 dukátov. Aby v utorok pred výberom bolo v mešci 80 dukátov, musela by Marienka v pondelok do mešca vložiť 40 dukátov.

Iné riešenie. 1. Ak Marienkin pondelkový vklad označíme z, tak

- v utorok po výbere bolo v mešci $2z - 40$ dukátov,
- v stredu po výbere bolo v mešci $4z - 80 - 40 = 4z - 120$ dukátov,
- vo štvrtok po výbere bolo v mešci $8z - 240 - 40 = 8z - 280$ dukátov.

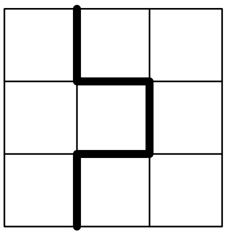
Vo štvrtok po výbere bol mešec prázdny, tzn. $8z = 280$, teda $z = 35$. V pondelok Marienka do mešca vložila 35 dukátov.

2. Aby každý deň pred výberom bol počet dukátov v mešci rovnaký, musel by byť počet dukátov rovnaký aj po výbere, resp. pred nočným zdvojnásobením. Porovnaním týchto hodnôt napr. v pondelok a v utorok dostávame $z = 2z - 40$, teda $z = 40$. V pondelok mala Marienka do mešca vložiť 40 dukátov.

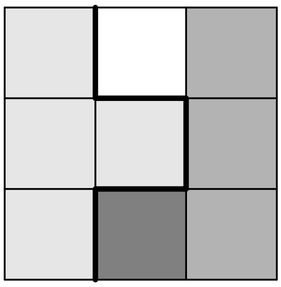
Návrh hodnotenia. Po 3 bodoch za každú časť úlohy (z toho 2 body za čiastočné kroky v zvolenom postupe a 1 bod za výsledok).

---

2. *Mriežka s deviatimi políčkami ako na obrázku je vyplnená deviatimi bezprostredne po sebe idúcimi prirodzenými číslami. Tie sú zoradené podľa veľkosti zľava doprava a zhora nadol (t. j. najmenšie číslo je vľavo hore, najväčšie je vpravo dole). Tučná lomená čiara rozdeľuje mriežku na dve časti. Súčet čísel v ľavej časti je o 100 menší ako súčet čísel v pravej. Ktoré číslo je v prostrednom políčku?* (*Libor Šimůnek*)



Riešenie. V každom riadku platí, že číslo v jeho pravom krajnom políčku je o 2 väčšie ako číslo v jeho ľavom krajnom políčku. Súčet čísel v pravom krajnom stĺpci je teda o $3 \cdot 2 = 6$ väčší ako súčet čísel v ľavom krajnom stĺpci. Číslo v dolnom políčku prostredného stĺpca je o 3 väčšie ako číslo v jeho prostrednom políčku. Tieto rozdiely sú v mriežke zvýraznené inými odtieňmi sivej.



Súčet čísel všetkých sivých políčok v pravej časti mriežky je preto o $6 + 3 = 9$ väčší ako súčet čísel všetkých sivých políčok v jej ľavej časti. Avšak súčet všetkých čísel v pravej časti má byť o 100 väčší ako súčet všetkých čísel v ľavej časti. Preto musí byť v jedinom nezvýraznenom políčku číslo $100 - 9 = 91$. V prostrednom políčku mriežky potom musí byť číslo $91 + 3 = 94$.

Návrh hodnotenia. 3 body za určenie vhodných podmnožín v dvoch oddelených častiach mriežky a stanovenie rozdielu súčtov v týchto podmnožinách; 2 body za vypočítanie čísla v neoznačenom políčku (alebo iného pomocného čísla); 1 bod za určenie čísla v prostrednom políčku.

Iné riešenie. Ak hľadané číslo v prostrednom políčku označíme x, tak čísla v ostatných políčkach sú:

$x-4$	$x-3$	$x-2$
$x-1$	x	$x+1$
$x+2$	$x+3$	$x+4$

Súčet všetkých čísel v ľavej časti mriežky je $4x-3$, súčet všetkých čísel v pravej časti je $5x+3$. Pritom druhý výraz má byť o 100 väčší ako prvý. Z toho dostávame rovnicu

$$4x-3+100=5x+3,$$

ktorej riešením je $x=94$. Číslo v prostrednom políčku je 94.

Návrh hodnotenia. 3 body za zostavenie rovnice, pričom neznámou je jedno z čísel v mriežke; 3 body za vypočítanie čísla v prostrednom políčku.

Poznámka. Pri inom výbere neznámej dôjdeme k inej rovnici s obdobným riešením. Ak napr. y označuje číslo v ľavom hornom políčku, tak dostaneme

$$\begin{aligned} y+(y+3)+(y+4)+(y+6)+100 &= (y+1)+(y+2)+(y+5)+(y+7)+(y+8),\\ 4y+113 &= 5y+23,\\ y &= 90. \end{aligned}$$

Číslo v prostrednom políčku je potom určené ako $y+4=94$.

---

3. *Adam má dva kvádre s objemami 12 cm^3 a 30 cm^3, pričom rozmery každého z nich sú v centimetroch vyjadrené navzájom rôznymi celými číslami. Adam zistil, že kvádre sa dajú zlepiť k sebe tak, aby lepené steny splývali, a získať tak nový kváder. Aké rozmery môže mať nový kváder? Určte všetky možnosti.* (*Eva Semerádová*)

Riešenie. Možné rozmery kvádrov určíme pomocou rozkladu zadaných objemov na súčin troch rôznych prirodzených čísel:

$$\begin{gathered} 12=1\cdot 2\cdot 6=1\cdot 3\cdot 4,\\ 30=1\cdot 2\cdot 15=1\cdot 3\cdot 10=1\cdot 5\cdot 6=2\cdot 3\cdot 5. \end{gathered}$$

V týchto rozkladoch hľadáme spoločné dvojice čísel, ktoré predstavujú rozmery lepených stien. Také dvojice sú práve tri a zodpovedajú nasledujúcim možnostiam:

a) Pre spoločnú stenu $1\,\mathrm{cm}\times 2\,\mathrm{cm}$ je tretí rozmer nového kvádra $6+15=21$ (cm).
b) Pre spoločnú stenu $1\,\mathrm{cm}\times 3\,\mathrm{cm}$ je tretí rozmer nového kvádra $4+10=14$ (cm).
c) Pre spoločnú stenu $1\,\mathrm{cm}\times 6\,\mathrm{cm}$ je tretí rozmer nového kvádra $2+5=7$ (cm).

Nový kváder mohol mať rozmery $1\,\mathrm{cm}\times 2\,\mathrm{cm}\times 21\,\mathrm{cm}$, $1\,\mathrm{cm}\times 3\,\mathrm{cm}\times 14\,\mathrm{cm}$, alebo $1\,\mathrm{cm}\times 6\,\mathrm{cm}\times 7\,\mathrm{cm}$.

Iné riešenie. Súčet objemov oboch kvádrov je $42\,\mathrm{cm}^3$. Rovnako ako pri pôvodných kvádroch sú rozmery nového kvádra v centimetroch vyjadrené celými číslami. Na rozdiel od pôvodných kvádrov však tieto rozmery nemusia byť navzájom rôzne. Možné rozmery nového kvádra určíme pomocou rozkladu jeho objemu na súčin troch prirodzených čísel:

$$42 = 1 \cdot 1 \cdot 42 = 1 \cdot 2 \cdot 21 = 1 \cdot 3 \cdot 14 = 1 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Dvojice čísel v týchto rozkladoch predstavujúce spoločnú stenu musia pozostávať z rôznych čísel, ktorých súčin musí byť deliteľom čísla 12 (objem menšieho z pôvodných kvádrov). Také dvojice sú štyri, a tie zodpovedajú nasledujúcim možnostiam:

a) Pre spoločnú stenu $1\,\mathrm{cm} \times 2\,\mathrm{cm}$ by tretí rozmer menšieho, resp. väčšieho kvádra bol $12 : 2 = 6\,(\mathrm{cm})$, resp. $30 : 2 = 15\,(\mathrm{cm})$.
b) Pre spoločnú stenu $1\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$ by tretí rozmer menšieho, resp. väčšieho kvádra bol $12 : 3 = 4\,(\mathrm{cm})$, resp. $30 : 3 = 10\,(\mathrm{cm})$.
c) Pre spoločnú stenu $1\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm}$ by tretí rozmer menšieho, resp. väčšieho kvádra bol $12 : 6 = 2\,(\mathrm{cm})$, resp. $30 : 6 = 5\,(\mathrm{cm})$.
d) Pre spoločnú stenu $2\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$ by tretí rozmer menšieho, resp. väčšieho kvádra bol $12 : 6 = 2\,(\mathrm{cm})$, resp. $30 : 6 = 5\,(\mathrm{cm})$.

V prípade d) by menší z pôvodných kvádrov nemal rôzne dĺžky strán, ostatné možnosti vyhovujú všetkým požiadavkám. Nový kváder mohol mať rozmery $1\,\mathrm{cm} \times 2\,\mathrm{cm} \times 21\,\mathrm{cm}$, $1\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm} \times 14\,\mathrm{cm}$, alebo $1\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm} \times 7\,\mathrm{cm}$.

Návrh hodnotenia. 2 body za určenie všetkých rozkladov; 3 body za diskusiu a výber vyhovujúcich možností; 1 bod za záver.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Oliver Ralík, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017