2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

---

1. *a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 60.*
b) Určte všetky prirodzené čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120.
(*J. Moravčík*)

Riešenie. a) Číslo $n = m^6 - m^2 = m^2(m^2-1)(m^2+1)$ je vždy deliteľné štyrmi, pretože pri párnom m je m^2 deliteľné štyrmi a pri nepárnom m sú čísla m^2-1, m^2+1 obe párne, jedno z nich je dokonca deliteľné štyrmi a ich súčin je teda deliteľný ôsmimi. Z troch po sebe idúcich prirodzených čísel $m^2 - 1$, m^2, $m^2 + 1$ je práve jedno deliteľné tromi, a preto je aj číslo n deliteľné tromi. Ak je m deliteľné piatimi, je m^2 deliteľné piatimi, dokonca dvadsiatimi piatimi. V opačnom prípade je m tvaru $5k + r$, kde r je rovné niektorému z čísel 1, 2, 3, 4 a k je prirodzené alebo 0. Potom $m^2 = 25k^2 + 10kr + r^2$ a r^2 sa rovná niektorému z čísel 1, 4, 9, 16. V prvom a v poslednom prípade je číslo $m^2 - 1$ deliteľné piatimi, v ostatných dvoch prípadoch je číslo $m^2 + 1$ deliteľné piatimi. Teda číslo n je vždy deliteľné nesúdeliteľnými číslami 4, 3 a 5, a teda aj ich súčinom 60.

b) Už sme ukázali, že v prípade nepárneho m je súčin $(m^2 - 1)(m^2 + 1)$ deliteľný ôsmimi a číslo $n = m^6 - m^2$ je teda deliteľné číslom $120 = 8 \cdot 3 \cdot 5$. Ak je však číslo m párne, sú čísla $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ nepárne, žiadne nie je deliteľné dvoma. Číslo n je potom deliteľné ôsmimi iba v prípade, že m^2 je deliteľné ôsmimi, teda m je deliteľné štyrmi. Číslo n je potom deliteľné šestnástimi, tromi a piatimi, a preto dokonca číslom 240.

Naše výsledky môžeme zhrnúť. Číslo $n = m^6 - m^2$ je deliteľné číslom 120 práve vtedy, keď m je nepárne alebo deliteľné štyrmi.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že číslo $n^3 - n$ je pre každé prirodzené číslo n deliteľné šiestimi.
N2. Nájdite všetky dvojciferné čísla n, pre ktoré je číslo $n^3 - n$ deliteľné číslom 100. [Riešením sú práve čísla 24, 25, 49, 51, 75, 76 a 99, poz. úlohu 50–C–S–3.]
N3. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré číslo n^2+1 delí číslo n^3-8n^2+2n. [Návod: $n^3 - 8n^2 + 2n = (n - 8)(n^2 + 1) + n + 8$, pre $n = 1, 3$ nedelí $n^2 + 1$ číslo $n + 8$, pre $n > 3$ je $n^2 + 1$ väčšie ako $n + 8$, a teda nedelí $n + 8$. Jediné riešenie je $n = 2$, poz. 40–C–S–2.]

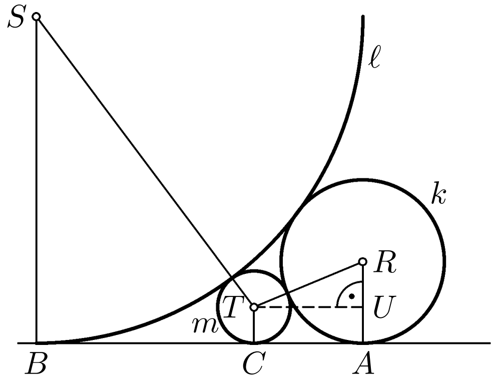
---

2. *Kružnice k, ℓ, m sa po dvoch zvonka dotýkajú a všetky tri majú spoločnú dotyčnicu. Polomery kružníc k, ℓ sú 3 cm a 12 cm. Vypočítajte polomer kružnice m. Nájdite všetky riešenia.* (*L. Boček*)

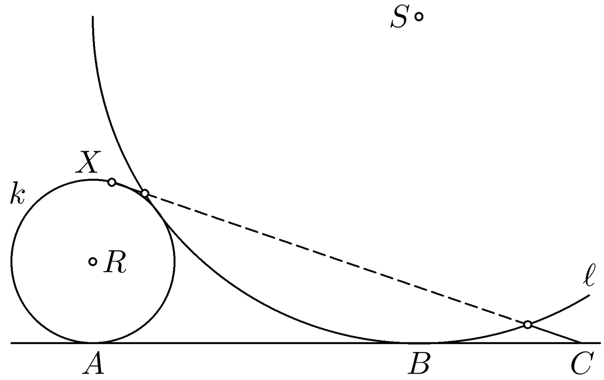
Riešenie. Označme postupne R, S, T stredy a A, B, C body dotyku kružníc k, ℓ, m na spoločnej dotyčnici a $r = 3$, $s = 12$ a t ich polomery (dĺžky a obsahy budeme počítať bez jednotiek kvôli jednoduchšiemu dosadzovaniu). V lichobežníku (ktorý v prípade rovnosti $r = t$ je ale obdĺžnikom) $ARTC$ (obr. 1) je $|RT| = r + t$. Ak označíme U priesečník priamky AR a priamky vedenej bodom T rovnobežne s AC, platí $|RU| = |r - t|$. Z pravouhlého trojuholníka RUT vyplýva

$$|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} = 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}.$$

Analogicky by sme z lichobežníkov $CTSB$ a $ARSB$ dostali vzťahy $|BC| = 2\sqrt{st} = 4\sqrt{3t}$ a $|AB| = 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{3 \cdot 12} = 12$.



Obr. 1



Obr. 2

Uvažujme najprv prípad, keď bod C leží medzi bodmi A a B. Potom $2\sqrt{3t} + 4\sqrt{3t} = 12$, odkiaľ $t = 4/3$. Ak bod A leží medzi bodmi C a B, dostaneme podobne rovnicu $2\sqrt{3t} + 12 = 4\sqrt{3t}$, odkiaľ $t = 12$. Rovnica $12 + 4\sqrt{3t} = 2\sqrt{3t}$, ktorú dostaneme pre polohu bodu B medzi bodmi A a C, nemá zjavne žiadne riešenie. Že taký prípad nie je možný, vidno aj z obr. 2. Každá kružnica, ktorá sa dotýka kružnice k v bode X rôznom od A a pritom obsahuje bod C polpriamky opačnej k polpriamke BA, musí vo svojom vnútri obsahovať aj tetivu kružnice ℓ (vyznačenú na obr. 2), takže sa jej nemôže dotýkať.

Polomer kružnice m je teda $\frac{4}{3}$ cm alebo 12 cm.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte polomery troch kružníc, ktorých stredy tvoria vrcholy trojuholníka so stranami dĺžok a, b, c a každé dve majú vonkajší dotyk.

N2. Kružnice k, ℓ so stredmi K, L a polomermi r, s majú vonkajší dotyk v bode T a okrem spoločnej dotyčnice t v tomto bode sa dotýkajú ešte ďalšej spoločnej dotyčnice: kružnica k v bode A, kružnica ℓ v bode B. Bod C je priesečníkom priamok AB, t. Dokážte, že trojuholníky KCL, ATB sú pravouhlé. [Ukážte pomocou Pytagorovej vety, že $|CA| = |CT| = |CB| = \sqrt{rs}$, poz. úlohu 50–C–II–2.]

---

3. *Určte počet všetkých trojíc navzájom rôznych trojmiestnych prirodzených čísel, ktorých súčet je deliteľný každým z troch sčítaných čísel.* (J. Šimša)

Riešenie. Nech x, y, z je taká trojica navzájom rôznych prirodzených čísel, že každé z nich delí ich súčet. Takže x delí $y + z$, y delí $x + z$ a z delí $x + y$. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $x < y < z$. Teda $x + y = kz$ pre vhodné prirodzené k. Pretože zároveň $x + y < 2z$, nutne $k = 1$, t. j. $x + y = z$. Ďalej y delí $x + z = 2x + y < 3y$, takže $2x + y = 2y$, t. j. $y = 2x$. Tri prirodzené čísla daných vlastností majú teda tvar x, $y = 2x$, $z = 3x$, kde x je prirodzené. Pretože majú byť trojmiestne, musí byť $x \geqq 100$, $3x \leqq 999$, takže $100 \leqq x \leqq 333$. Hľadaný počet trojíc je $333 - 99 = 234$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel k, ℓ, pre ktoré platí $k\ell - k - 2\ell = 8$. [Rovnosť napíšeme v tvare $\ell(k-2) = k + 8$, $k - 2$ teda delí $k + 8 = (k-2) + 10$, takže $k - 2$ delí číslo 10, takže $k = 3$, $\ell = 11$, alebo $k = 4$, $\ell = 6$, alebo $k = 7$, $\ell = 3$, alebo $k = 12$, $\ell = 2$.]

N2. Nájdite všetky trojice prirodzených čísel x, y, z, ktoré spĺňajú sústavu rovníc $y + z = 5x$, $z + x = 2y$, $x + y = z$. [Výsledok: $y = 2x$, $z = 3x$.]

4. *Je dané prirodzené číslo n $(n \geqq 2)$ a reálne čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, pre ktoré platí*

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \dots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = 1.$$

Dokážte, že

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geqq n.$$

(*J. Švrček*)

Riešenie. Čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú podľa podmienok úlohy nenulové a všetky s nepárnymi indexami sú si rovné, rovnajú sa nenulovému číslu a; všetky čísla s párnymi indexami sú si tiež rovné, rovnajú sa $1/a$, prevrátenej hodnote a. Ak je n nepárne, vyplýva z rovnice $x_1x_2 = x_nx_1$ rovnosť $x_n = x_2$, takže všetky x_i sú rovnaké. Rovnajú sa 1 alebo -1, lebo to sú jediné hodnoty a, pre ktoré $a = 1/a$. Takže súčet ich druhých mocnín je n. Ak je n párne, rovná sa súčet druhých mocnín všetkých hodnôt x_i súčtu $n/2$ hodnôt a^2 a $n/2$ hodnôt $1/a^2$. Avšak $a^2 + 1/a^2 \geqq 2$ pre každé nenulové číslo a, čo vyplýva z nerovnosti $(a^2 - 1)^2 \geqq 0$. Preto je súčet druhých mocnín všetkých čísel x_i väčší alebo rovný n.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ak pre kladné čísla a, b platí $ab = 1$, tak $a + b \geqq 2$. Dokážte. [Vyjdeme zo vzťahu $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqq 0$.]

N2. Ak pre reálne čísla x, y, z platí $3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2$, tak $x = y = z$. Dokážte. [Danú rovnosť upravte na tvar $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$.]

N3. Nájdite všetky trojice kladných čísel a, b, c, pre ktoré platí $a + 2b + 3c + 1/a + 2/b + 3/c = 12$. [Ukážte, že súčet kladného čísla a jeho prevrátenej hodnoty je väčší alebo rovný 2, vyhovuje iba trojice $a = b = c = 1$, poz. 33–C–I–1.]

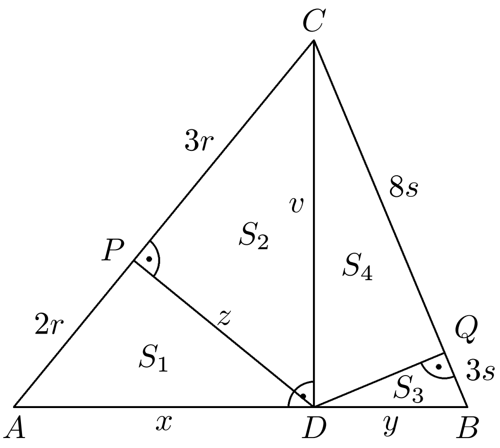
N4. Určte všetky usporiadané štvorice reálnych čísel a, b, c, d, pre ktoré platí $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = ab + cd$. [Z daných vzťahov vyplýva $a^2 + c^2 + b^2 + d^2 = 2ab + 2cd$, teda $(a - b)^2 + (c - d)^2 = 0$, odkiaľ $b = a$, $d = c$. Riešením sú všetky štvorice tvaru (a, a, b, b).]

---

5. *V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky z vrcholu C a P, Q zodpovedajúce päty kolmíc vedených bodom D na strany AC a BC. Obsahy trojuholníkov ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítajte $S_1 : S_3$, ak $S_1 : S_2 = 2 : 3$ a $S_3 : S_4 = 3 : 8$.* (*Pavel Novotný*)

Riešenie. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ (obr. 3). Z podobnosti trojuholníkov ADP a DCP vyplýva $x^2 : v^2 = S_1 : S_2 = 2 : 3$. Podobne z podobnosti trojuholníkov DBQ, CDQ vyplýva $y^2 : v^2 = S_3 : S_4 = 3 : 8$. Odtiaľ $x^2 : y^2 = (2 \cdot 8) : (3 \cdot 3) = 16 : 9$, teda $x : y = 4 : 3$. Trojuholníky ADC, DBC majú spoločnú výšku, preto $(S_1 + S_2) : (S_3 + S_4) = x : y = 4 : 3$. Za S_2 sem dosadíme $\frac{3}{2}S_1$, za S_4 dosadíme

$\frac{8}{3}S_3$ a po úprave dostaneme $S_1 : S_3 = 88 : 45$.



Obr. 3

Iné riešenie. Z pomeru obsahov trojuholníkov ADP a CDP so spoločnou výškou DP vyplýva, že $|AP| : |CP| = 2 : 3$, takže môžeme písať $|AP| = 2r$, $|CP| = 3r$, podobne $|BQ| = 3s$, $|CQ| = 8s$. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ a $z = |PD|$ (obr. 3). Z pravouhlých trojuholníkov ADP, ADC, PDC vyplýva $x^2 = 4r^2 + z^2$, $z^2 + 9r^2 = v^2 = 25r^2 - x^2$. Odtiaľ $z^2 = 16r^2 - x^2 = 16r^2 - (4r^2 + z^2)$, čiže $2z^2 = 12r^2$, $z = r\sqrt{6}$, $x = r\sqrt{10}$, $v = r\sqrt{15}$, $S_1 = r^2\sqrt{6}$. Analogicky by sme dostali z trojuholníkov BDQ, BDC, QDC, že $v = 2s\sqrt{22}$, $y = s\sqrt{33}$, $S_3 = 3s^2\sqrt{6}$, teda použitím vzťahu $v^2 = 15r^2 = 88s^2$ dostaneme výsledok $S_1 : S_3 = 88 : 45$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Lichobežník $ABCD$ so základňami AB, CD dĺžok 12 cm a 6 cm je svojimi uhlopriečkami rozdelený na 4 trojuholníky. Určte ich obsahy, ak sa obsah lichobežníka rovná 45 cm^2. [Obsahy sú 5, 10, 10 a 20 cm^2.]

N2. Konvexný štvoruholník je uhlopriečkami rozdelený na štyri trojuholníky, tri z nich majú obsahy 2 cm^2, 3 cm^2 a 4 cm^2. Určte obsah štvrtého. [Výsledok je 6 cm^2, $\frac{8}{3}$ cm^2 alebo $\frac{3}{2}$ cm^2. Ak označíme S_1, S_2, S_3, S_4 obsahy trojuholníkov v poradí, v akom spolu susedia, platí $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.]

---

6. *Rozhodnite, ktoré z čísel*

$$\sqrt{p+\sqrt{q}}+\sqrt{q+\sqrt{p}}, \qquad \sqrt{p+\sqrt{p}}+\sqrt{q+\sqrt{q}}$$

je väčšie, ak p a q sú rôzne kladné čísla. (*J. Moravčík*)

Riešenie. Dané čísla, ktoré označíme postupne A a B, nebudeme porovnávať priamo. Namiesto toho porovnáme ich druhé mocniny a využijeme poznatok, že pre ľubovoľné kladné čísla u, v platí $u > v$ práve vtedy, keď platí $u^2 > v^2$. Pre dané čísla máme

$$A^2 = p + \sqrt{q} + 2\sqrt{(p+\sqrt{q})\,(q+\sqrt{p})} + q + \sqrt{p},$$
$$B^2 = p + \sqrt{p} + 2\sqrt{(p+\sqrt{p})\,(q+\sqrt{q})} + q + \sqrt{q}$$

a vidíme, že okrem „dlhých“ odmocnín sú na pravých stranách oboch vyjadrení štyri rovnaké sčítance (v odlišných poradiach). Preto nerovnosť $A^2 > B^2$ platí práve vtedy, keď je „dlhá odmocnina“ v prvom riadku väčšia ako v druhom riadku, čiže keď pre odmocňované súčiny platí nerovnosť

$$(p + \sqrt{q})\,(q + \sqrt{p}) > (p + \sqrt{p})\,(q + \sqrt{q})\,.$$

Roznásobením a ďalšími algebraickými úpravami dostaneme postupne ekvivalentné nerovnosti

$$\begin{aligned} pq + \sqrt{pq} + p\sqrt{p} + q\sqrt{q} &> pq + \sqrt{pq} + p\sqrt{q} + q\sqrt{p},\\ (p-q)\sqrt{p} - (p-q)\sqrt{q} &> 0,\\ (p-q)(\sqrt{p} - \sqrt{q}) &> 0. \end{aligned}$$

Vysvetlíme, prečo ostatná nerovnosť (a teda aj pôvodná nerovnosť $A > B$) v prípade $p \neq q$ vždy platí. Ak totiž $p > q$, tak aj $\sqrt{p} > \sqrt{q}$, takže oba činitele súčinu $(p-q)(\sqrt{p} - \sqrt{q})$ sú kladné. Ak $p < q$, sú oba činitele naopak záporné. V oboch prípadoch je preto daný súčin kladný.

Odpoveď. Väčšie je prvé z daných dvoch čísel.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ktoré z čísel $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$, $\sqrt{6 - \sqrt{2}}$ je väčšie? [Väčšie je druhé číslo. Zodpovedajúcu nerovnosť po umocnení upravte na $2\sqrt{2} < 3$.]

N2. Nájdite všetky dvojice kladných čísel a, b, pre ktoré platí

$$\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b^2 + a} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a + b}.$$

[Po umocnení upravte. Výsledkom sú všetky dvojice a, b, v ktorých $a = 1$ alebo $b = 1$, teda aj dvojica $a = b = 1$.]