2005/2006
55. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

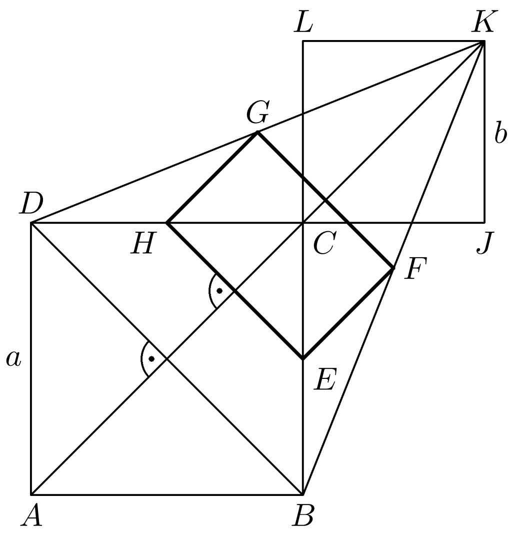
1. *Na hokejovom turnaji sa zúčastnili štyri družstvá, pričom každé zohralo s každým práve jeden zápas. V žiadnych dvoch zápasoch nepadlo rovnako veľa gólov, ale počet gólov strelených v každom zápase delí celkový počet gólov strelených na turnaji. Koľko najmenej gólov mohlo na turnaji padnúť?* (*M. Panák*)

Riešenie. Keďže každé družstvo zohralo s každým jeden zápas, zohralo každé družstvo na turnaji celkom tri zápasy a počet všetkých zápasov bol $4 \cdot 3/2 = 6$. Máme teda nájsť šesť rôznych prirodzených čísel (nula nedelí žiadne číslo) s najmenším možným súčtom tak, aby bol tento súčet deliteľný každým zo šiestich sčítancov. Najmenší súčet šiestich rôznych prirodzených čísel je $1+2+3+4+5+6 = 21$, ten však nie je deliteľný napr. dvoma (takisto ani štyrmi, piatimi či šiestimi) a iným spôsobom sa 21 ako súčet šiestich rôznych prirodzených čísel zapísať nedá. Ďalšia možnosť je nahradiť číslo 6 číslom 7, dostaneme $1+2+3+4+5+7 = 22$. Zasa je to jediná možnosť, ako 22 na súčet rozložiť. Ale 22 nie je deliteľné napr. tromi. Súčet 23 nemôže vyhovovať, pretože číslo 23 je prvočíslo, je deliteľné iba dvoma prirodzenými číslami (podobný argument sme mohli použiť aj pri súčte 22, ten má totiž iba štyroch rôznych prirodzených deliteľov). Konečne číslo 24 je súčtom čísel 1, 2, 3, 4, 6 a 8, pritom je číslo 24 deliteľné každým z čísel 1, 2, 3, 4, 6, 8. Na turnaji preto mohlo padnúť 24 gólov, nie však menej.

Za určenie počtu 6 zápasov nedajte žiadne body. Za správne zdôvodnenie odhadu, že gólov padlo aspoň $1+2+3+4+5+6$, dajte 2 body, za vylúčenie súčtu 21, 22 a 23 dajte 2 body, za určenie vyhovujúcej šestice 1, 2, 3, 4, 6, 8 so súčtom 24 ďalšie 2 body, teda 6 bodov za úplné riešenie.

2. *Vrchol C štvorcov $ABCD$ a $CJKL$ je vnútorným bodom úsečky AK aj úsečky DJ. Body E, F, G a H sú postupne stredy úsečiek BC, BK, DK a DC. Vyjadrite obsah štvoruholníka $EFGH$ pomocou obsahov S a T štvorcov $ABCD$ a $CJKL$.* (*P. Leischner*)

Riešenie. Označme $a = \sqrt{S}$, $b = \sqrt{T}$ strany štvorcov $ABCD$, $CJKL$. Úsečka EH je strednou priečkou trojuholníka BCD (obr. 1), úsečka FG je strednou priečkou troj-



Obr. 1

uholníka BKD, preto $2|EH| = 2|FG| = |BD|$ a úsečky EH, FG sú rovnobežné s BD. Podobne je úsečka HG strednou priečkou trojuholníka DCK a úsečka EF je strednou priečkou trojuholníka BCK. Preto $2|HG| = 2|EF| = |CK|$ a úsečky HG, EF sú rovnobežné s CK, a teda kolmé na JL a BD. Rovnobežník $EFGH$ je preto obdĺžnik s obsahom

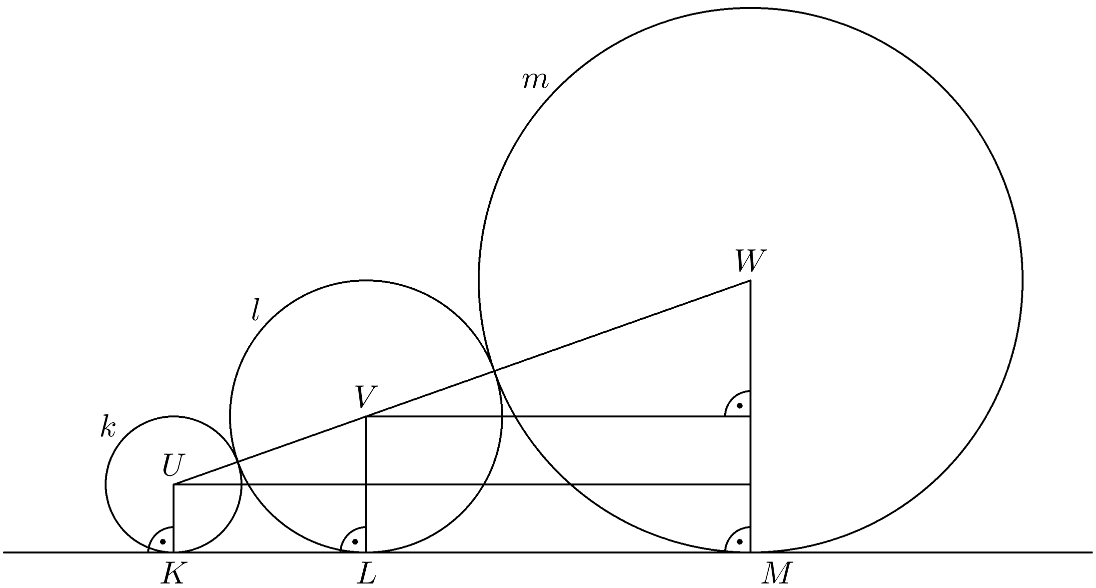
$$|EF| \cdot |FG| = a\,\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot b\,\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{ST}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za objav, že štvoruholník $EFGH$ je obdĺžnik, dajte 3 body, ďalšie 3 body za určenie jeho obsahu.

---

3. *Kružnice k, ℓ, m sa dotýkajú spoločnej dotyčnice v troch rôznych bodoch a ich stredy ležia na jednej priamke. Kružnice k a ℓ, a tiež kružnice ℓ a m, majú vonkajší dotyk. Určte polomer kružnice ℓ, ak polomery kružníc k a m sú* 3 cm *a* 12 cm. (*L. Boček*)

Riešenie. Vzájomná poloha kružníc a ich spoločnej dotyčnice musí vyzerať ako na obr. 2, kde sme písmenami K, L, M označili body dotyku kružníc k, l, m na spoločnej



Obr. 2

dotyčnici, U, V, W ich stredy a r polomer kružnice l (v centimetroch). Z pravouhlých lichobežníkov $KLVU$, $LMWV$, $KMWU$ vyplýva podľa Pytagorovej vety

$$|KL|^2 = (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r,$$
$$|LM|^2 = (12+r)^2 - (12-r)^2 = 48r$$

a

$$|KM|^2 = (3+2r+12)^2 - (12-3)^2 = 4r^2 + 60r + 144.$$

Keďže $|KL| + |LM| = |KM|$, dostaneme z prvých dvoch vzťahov

$$|KM|^2 = (|KL| + |LM|)^2 = |KL|^2 + 2|KL||LM| + |LM|^2 = 60r + 2\sqrt{12 \cdot 48}\,r,$$

čo spolu s tretím vzťahom dáva po úprave pre r rovnicu

$$4r^2 - 48r + 144 = 0.$$

Pretože $4r^2 - 48r + 144 = 4(r^2 - 12r + 36) = 4(r - 6)^2$, má táto rovnica jediné riešenie $r = 6$. Polomer kružnice l je teda 6 cm.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za vyjadrenie dĺžok úsečiek KL, LM, KM pomocou r dajte 3 body, ďalšie 3 body za správny výpočet polomeru r.