67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5*

1. *Janko dostal vreckové a chce si zaň kúpiť niečo dobré. Keby si kúpil štyri koláče, zvýšilo by mu 0,50 €. Keby si chcel kúpiť päť koláčov, chýbalo by mu 0,60 €. Keby si kúpil dva koláče a tri šišky, utratil by celé vreckové bezo zvyšku. Koľko stojí jedna šiška?* (Lenka Dedková)

Nápad. Koľko stojí jeden koláč?

Riešenie. Jankovo vreckové možno vyjadriť tromi spôsobmi, a to ako

- súčet ceny 4 koláčov plus 0,50 €,
- súčet ceny 5 koláčov mínus 0,60 €,
- súčet cien 2 koláčov a 3 šišiek.

Z prvých dvoch vyjadrení vyplýva, že jeden koláč stojí $0{,}50 + 0{,}60 = 1{,}10$ €. Z toho tiež zisťujeme, že Jankovo vreckové bolo $4 \cdot 1{,}10 + 0{,}50 = 5 \cdot 1{,}10 - 0{,}60 = 4{,}90$ €. Z tretieho vyjadrenia vyplýva, že za tri šišky by Janko zaplatil $4{,}90 - 2 \cdot 1{,}10 = 2{,}70$ €. Jedna šiška teda stojí $2{,}70 : 3 = 0{,}90$ €.

2. *Jano mal tri klietky (čiernu, striebornú, zlatú) a tri zvieratá (morča, potkana a tchora). V každej klietke bolo jedno zviera. Zlatá klietka stála naľavo od čiernej klietky. Strieborná klietka stála napravo od klietky s morčaťom. Potkan bol v klietke napravo od striebornej klietky. Určte, v ktorej klietke bolo ktoré zviera.* (Libuše Hozová)

Nápad. Aké bolo poradie klietok?

Riešenie. Z posledných dvoch informácií vyplýva, že strieborná klietka nestála ani úplne vľavo, ani úplne vpravo, teda stála uprostred. Zlatá klietka stála naľavo od čiernej klietky, teda poradie klietok bolo: zlatá, strieborná, čierna.

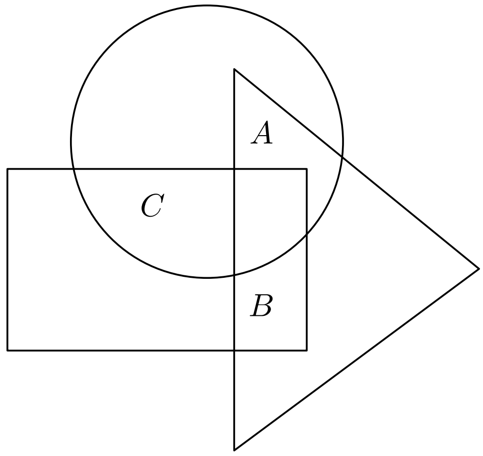
Potkan bol v klietke napravo od striebornej klietky, teda bol v čiernej klietke. Strieborná klietka stála napravo od klietky s morčaťom, teda morča bolo v zlatej klietke. Jano mal zvieratá v klietkach rozmiestnené takto:

zlatá	strieborná	čierna
morča	tchor	potkan

3. *Na obrázku je diagram so siedmimi políčkami. Nakreslite do neho hviezdičky tak, aby boli splnené všetky nasledujúce podmienky:*

- *Hviezdičiek je celkom 21.*
- *V každom políčku je aspoň jedna hviezdička.*
- *V políčkach označených A, B, C je dokopy 8 hviezdičiek.*
- *V políčkach označených A a B je dokopy menej hviezdičiek ako v políčku označenom C.*
- *V políčku označenom B je viac hviezdičiek ako v políčku označenom A.*
- *V kruhu je celkom 15 hviezdičiek, v trojuholníku celkom 12 hviezdičiek a v obdĺžniku celkom 14 hviezdičiek.*

(Eva Semerádová)

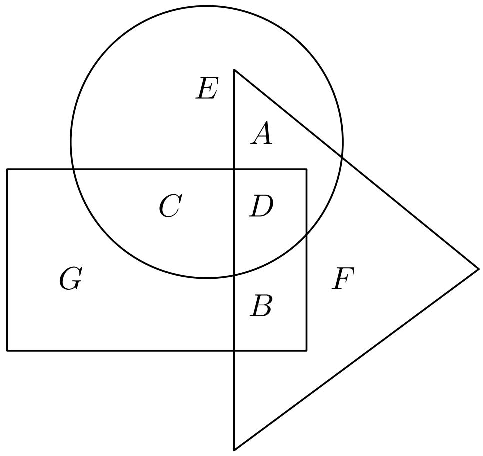


Nápad. Určte najskôr počty hviezdičiek v políčkach A, B, C.

Riešenie. Z druhej a piatej podmienky vyplýva, že v políčku A je aspoň 1 hviezdička a v políčku B sú aspoň 2 hviezdičky. Teda v políčkach A a B sú spolu aspoň 3 hviezdičky. Z tretej a štvrtej podmienky vyplýva, že v týchto dvoch políčkach nie sú spolu viac ako 3 hviezdičky. Preto sú v políčkach A a B spolu práve 3 hviezdičky a v políčku C je 5 hviezdičiek:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5.$$

Aj ostatné políčka označíme písmenami ako v nasledujúcom obrázku:

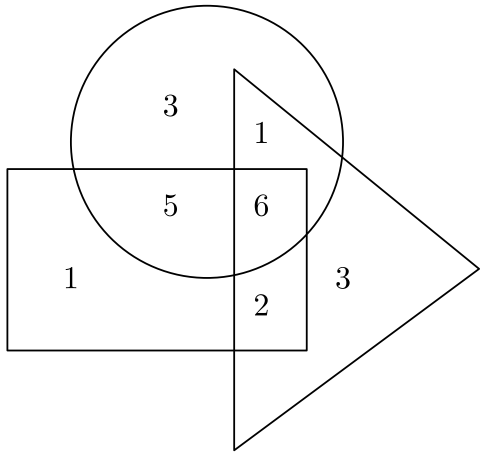


Každé z políčok A, B a C je spoločné dvom z troch útvarov uvedených v šiestej podmienke (napr. políčko A patrí kruhu a trojuholníku). Políčko D je spoločné všetkým trom útvarom. Zvyšné políčka E, F a G patria do navzájom rôznych útvarov. Súčet hviezdičiek v kruhu, trojuholníku a obdĺžniku je $15 + 12 + 14 = 41$ a v tomto súčte sú hviezdičky z políčok A, B, C započítané dvakrát, hviezdičky z políčka D trikrát a hviezdičky z políčok E, F, G jedenkrát. Pritom podľa prvej podmienky je hviezdičiek spolu 21 a v tomto súčte sú hviezdičky z každého políčka počítané jedenkrát. Rozdiel 20 hviezdičiek preto zodpovedá súčtu hviezdičiek v políčkach A, B, C (ktorých je celkom 8) a dvojnásobku počtu hviezdičiek v políčku D. V políčku D preto musí byť 6 hviezdičiek:

$$D = (20 - 8) : 2 = 6.$$

Počty hviezdičiek vo zvyšných políčkach možno teraz dopočítať podľa informácií v šiestej podmienke:

$$\begin{aligned} 15 &= A + C + D + E, &\quad \text{teda} \quad E &= 15 - 1 - 5 - 6 = 3,\\ 12 &= A + B + D + F, &\quad \text{teda} \quad F &= 12 - 1 - 5 - 2 = 3,\\ 14 &= B + C + D + G, &\quad \text{teda} \quad G &= 14 - 2 - 5 - 6 = 1. \end{aligned}$$



Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení odvodíme počty hviezdičiek v políčkach A, B a C:

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 5.$$

Podľa informácií v šiestej podmienke zisťujeme, že

$$\begin{aligned} 15 &= A + C + D + E, &\quad \text{teda} \quad D + E &= 15 - 1 - 5 = 9,\\ 12 &= A + B + D + F, &\quad \text{teda} \quad D + F &= 12 - 1 - 2 = 9,\\ 14 &= B + C + D + G, &\quad \text{teda} \quad D + G &= 14 - 2 - 5 = 7. \end{aligned}$$

Z toho vidíme, že v políčkach E a F je rovnaký počet hviezdičiek, a ten je o 2 väčší ako v políčku G. Teraz môžeme postupne dosadzovať počty hviezdičiek v ktoromkoľvek z políčok D, E, F, G, z predchádzajúceho vyjadriť počty vo zvyšných troch políčkach a overiť, či je celkový súčet $A + B + C + D + E + F + G$ rovný 21. Dosadzujeme za G, pričom máme na pamäti, že v každom políčku má byť aspoň jedna hviezdička:

G	$E = F$	D	súčet
1	**3**	**6**	**21**
2	4	5	23
3	5	4	25
4	6	3	27
5	7	2	29
6	8	1	31

Jediná vyhovujúca možnosť je zvýraznená v prvom riadku.

4. *Eva s Marekom hrali bedminton a Viktor im počítal výmeny. Po každých 10 výmenách nakreslil Viktor krížik (X). Potom namiesto každých 10 krížikov nakreslil krúžok (O) a prislúchajúcich 10 krížikov zmazal. Keď Eva a Marek hru ukončili, mal Viktor nakreslené toto:*

OOOXXXXXXX

Určte, koľko najmenej a koľko najviac výmen Eva s Marekom mohli zohrať.

(*Miroslava Farkas Smitková*)

Nápad. Koľko výmen mohli Eva s Marekom odohrať, keby nakoniec bol nakreslený iba jeden krúžok?

Riešenie. Každý krúžok nahrádza 10 krížikov, predchádzajúci zápis teda zodpovedá 37 krížikom. Každý krížik predstavuje 10 odohraných výmen, Eva s Marekom teda zohrala najmenej 370 a najviac 379 výmen.

---

5. *Zostrojte ľubovoľnú úsečku AS, potom zostrojte kružnicu k so stredom v bode S, ktorá prechádza bodom A.*

1. *Zostrojte na kružnici k body E, F, G tak, aby spolu s bodom A určovali obdĺžnik $AEFG$. Nájdite aspoň dve riešenia.*
2. *Zostrojte na kružnici k body B, C, D tak, aby spolu s bodom A určovali štvorec $ABCD$.*

(*Lucie Růžičková*)

Nápad. Čo viete o uhlopriečkach v obdĺžniku a vo štvorci?

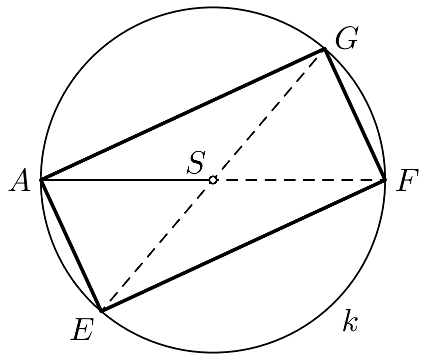
Riešenie. 1. Obdĺžnik je štvoruholník, ktorý má všetky vnútorné uhly pravé. Uhlopriečky každého obdĺžnika sú rovnako dlhé a pretínajú sa vo svojich stredoch. Z toho vyplýva, že kružnica so stredom v priesečníku uhlopriečok, ktorá prechádza jedným vrcholom obdĺžnika, prechádza aj všetkými ostatnými vrcholmi.

Z týchto vlastností možno odvodiť niekoľko riešení úlohy, napr.:

- na kružnici k zvolíme ľubovoľne bod E,
- bod F zostrojíme ako priesečník kružnice k s kolmicou na priamku AE idúcou bodom E,
- bod G zostrojíme ako priesečník kružnice k s kolmicou na priamku EF idúcou bodom F.

Iné riešenie tej istej úlohy je toto:

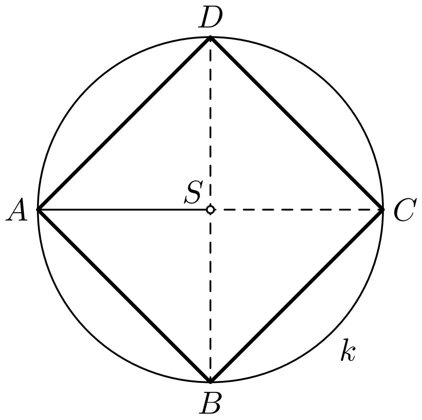
- na kružnici k zvolíme ľubovoľne bod E,
- bod F zostrojíme ako priesečník kružnice k s priamkou AS,
- bod G zostrojíme ako priesečník kružnice k s priamkou ES.



2. Štvorec je štvoruholník, ktorý má všetky vnútorné uhly pravé a všetky strany rovnako dlhé. Okrem všetkých vlastností menovaných v predchádzajúcom prípade navyše platí, že uhlopriečky každého štvorca sú navzájom kolmé.

Úlohu možno riešiť napr. takto:

- bod C zostrojíme ako priesečník kružnice k s priamkou AS,
- body B a D zostrojíme ako priesečníky kružnice k s kolmicou na priamku AC idúcou bodom S.



6. *Na stole ležalo osem kartičiek s číslami 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Fero si vybral tri kartičky. Sčítal na nich napísané čísla a zistil, že ich súčet je o 1 väčší ako súčet čísel na zvyšných kartičkách. Ktoré kartičky mohli zostať na stole? Určte všetky možnosti.*
(*Libuše Hozová*)

Nápad. Aký je súčet čísel na všetkých kartičkách?

Riešenie. Súčet čísel na všetkých ôsmich kartičkách je

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 77,$$

a to je rovné $39+38$. Fero si vybral tri kartičky so súčtom čísel 39. Postupným skúšaním od najväčších čísel nájdeme všetky vyhovujúce možnosti:

v ruke	na stole
19, 17, 3	13, 11, 7, 5, 2
19, 13, 7	17, 11, 5, 3, 2

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Farkas Smitková, Libor Šimůnek, Erika Trojáková, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Trojáková , Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Vojtech Bálint

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017