67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9*

<u>*Informácia pre okresnú komisiu MO:*</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení okresných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 16. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* `skmo@skmo.sk` *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* `skmo.sk/dokument.php?id=429` *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

1. *Štefka a Terezka dostali bonboniéru, v ktorej bolo 35 čokoládových cukríkov. Prvý deň zjedla Terezka $\frac{2}{5}$ toho, čo zjedla v tento deň Štefka. Druhý deň zjedla Štefka $\frac{3}{4}$ toho, čo zjedla v tento deň Terezka. Na konci druhého dňa bola bonboniéra prázdna. Koľko cukríkov celkom zjedla Terezka, keď vieme, že počet cukríkov zjedených Terezkou a počet cukríkov zjedených Štefkou sa líšia o najmenšiu možnú hodnotu? Každý deň zjedlo každé z dievčat aspoň jeden cukrík a žiadny cukrík nebol delený na časti.* (Libuše Hozová)

Riešenie. Prvý deň Terezka zjedla $\frac{2}{5}$ toho, čo zjedla Štefka. Počet cukríkov zjedených ten deň Štefkou preto musel byť deliteľný 5. Druhý deň zjedla Štefka $\frac{3}{4}$ toho, čo zjedla Terezka. Počet cukríkov zjedených ten deň Terezkou preto musel byť deliteľný 4. Počty cukríkov zjedených dievčatami v jednotlivých dňoch uvádzame v nasledujúcej tabuľke, pričom x a y sú neznáme prirodzené čísla:

	1. deň	2. deň
Štefka	$5x$	$3y$
Terezka	$2x$	$4y$

Spolu sa za oba dni zjedlo 35 cukríkov, teda

$$7x + 7y = 35, \quad \text{čiže} \quad x + y = 5. \tag{1}$$

Rozdiel medzi počtom cukríkov zjedených Terezkou a počtom cukríkov zjedených Štefkou je

$$|(2x + 4y) - (5x + 3y)| = |y - 3x|. \tag{2}$$

Ak z (1) vyjadríme $y = 5 - x$ a dosadíme do (2), dostaneme rozdiel $|5 - 4x|$. Tento rozdiel je najmenší možný práve vtedy, keď $x = 1$. Z toho vyplýva, že $y = 4$ a že Terezka celkom zjedla $2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 18$ cukríkov.

Poznámka. Dvojice prirodzených čísel (x, y) vyhovujúce rovnici (1) sú štyri:

$$(1, 4), \quad (2, 3), \quad (3, 2), \quad (4, 1).$$

Dosadením každej z týchto dvojíc do úvodnej tabuľky dostaneme konkrétne hodnoty, medzi ktorými možno vybrať tú s najmenším rozdielom medzi počtami cukríkov zjedených Terezkou a Štefkou. Toto riešenie zodpovedá prvej uvedenej dvojici:

	1. deň	2. deň	celkom
Štefka	5	12	17
Terezka	2	16	18

Iné riešenie. Keďže celkový počet cukríkov bol 35, čo je nepárne číslo, najmenší možný rozdiel medzi cukríkmi zjedenými Štefkou a Terezkou by mohol byť 1. V takom prípade by buď Štefka zjedla 18 cukríkov a Terezka 17, alebo naopak. Pri rovnakom označení ako v úvode predchádzajúceho riešenia by prvá možnosť viedla na sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 18, \\ 2x + 4y &= 17. \end{aligned}$$

Po úpravách dostávame riešenie $x = \frac{3}{2}$ a $y = \frac{7}{2}$, ktoré však nie je vyhovujúce, keďže nie je celočíselné. Druhá uvedená možnosť by viedla na sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 17, \\ 2x + 4y &= 18, \end{aligned}$$

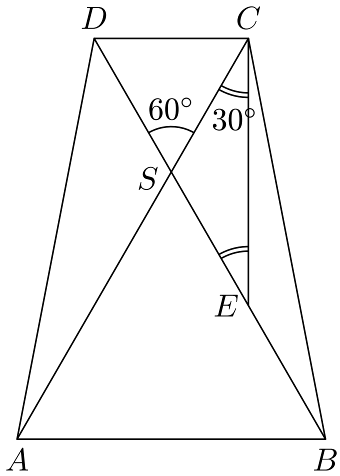
ktorá po úpravách dáva riešenie $x = 1$ a $y = 4$. Terezka celkom zjedla 18 cukríkov.

Návrh hodnotenia. 2 body za vzťahy medzi zjedenými cukríkmi v jednotlivých dňoch (napr. ako v úvodnej tabuľke); 2 body za zostavenie rovníc; 2 body za doriešenie a kvalitu komentára.

---

2. *Vo štvoruholníku $ABCD$ sú strany AB a CD rovnobežné, pričom strana AB je dvakrát dlhšia ako strana CD. Bod S je priesečníkom uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$ a trojuholníky ABS a CDS sú oba rovnostranné. Bod E je taký bod úsečky BS, že veľkosť uhla ACE je 30°. Určte pomer obsahov štvoruholníka $ABCD$ a trojuholníka EBC.* (Eva Semerádová)

Riešenie. Zo zadania vieme, že (1) trojuholníky ABS a CDS sú rovnostranné a (2) dĺžky ich strán sú v pomere 2 : 1. Z prvého poznatku vyplýva, že všetky vnútorné uhly v týchto trojuholníkoch majú veľkosť 60°. Preto je veľkosť uhla ESC rovná $180° - 60° = 120°$. Keďže veľkosť uhla SCE je 30°, na veľkosť uhla SEC v trojuholníku SEC ostáva tiež 30°. Trojuholník SEC je teda rovnoramenný so základňou EC, a preto sú úsečky SE a SC zhodné. Z druhého poznatku vyplýva, že úsečka SB má dvojnásobnú dĺžku v porovnaní s úsečkou SC. Spolu teda zisťujeme, že bod E leží v strede úsečky SB, resp. úsečka DB je bodmi S a E rozdelená na tretiny.



Trojuholníky DBC a EBC majú spoločný vrchol C a dĺžky jemu protiľahlých strán DB a EB sú v pomere $3:1$. V rovnakom pomere sú preto aj ich obsahy,

$$S_{DBC} : S_{EBC} = 3 : 1.$$

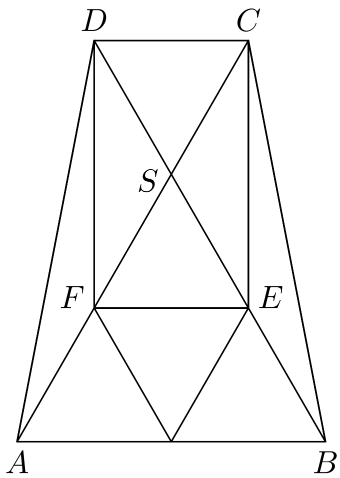
Lichobežník $ABCD$ je uhlopriečkou DB rozdelený na dva trojuholníky DBA a DBC, ktoré majú spoločnú výšku s lichobežníkom a dĺžky prislúchajúcich strán AB a CD sú v pomere $2:1$. V rovnakom pomere sú preto aj obsahy týchto trojuholníkov, tzn.

$$S_{ABCD} : S_{DCB} = 3 : 1.$$

Spolu teda zisťujeme, že hľadaný pomer obsahov je

$$S_{ABCD} : S_{ECB} = 9 : 1.$$

Poznámka. Trojuholníky ABS a CDS sú podobné s koeficientom podobnosti $2:1$, ich obsahy sú preto v pomere $4:1$. Názorne možno tento pomer ukázať rozdelením trojuholníka ASB pomocou stredných priečok na štyri trojuholníky zhodné s CDS, pozri obrázok. Doplnením úsečky DF je lichobežník $ABCD$ rozdelený na deväť trojuholníkov majúcich rovnaký obsah ako trojuholník EBC.



Návrh hodnotenia. 3 body za určenie, že bod E je v strede úsečky SB; po 1 bode za každý zo zvýraznených pomerov (alebo zodpovedajúce čiastočné kroky pri inom riešení).

3. *Štyri kamarátky našli v učebnici nasledujúcu poznámku:*

Vieme, že $\sqrt{a\cdot b}=99\sqrt{2}$ *a že* $\sqrt{a\cdot b\cdot c}$ *je prirodzené číslo.*

Teraz premýšľajú a dohadujú sa, čo môžu povedať o čísle c:

Anna: „Určite to nemôže byť $\sqrt{2}$*."*
Dana: „Môže to byť napr. 98."
Hana: „Môže to byť akékoľvek párne číslo."
Jana: „Také číslo je určite len jedno."

Rozhodnite, ktoré z dievčat má (majú) pravdu, a vysvetlite prečo.

(Eva Semerádová)

Riešenie. Uvedený výraz môžeme vyjadriť ako

$$\sqrt{a\cdot b\cdot c}=\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{c}=99\sqrt{2}\cdot\sqrt{c}. \tag{1}$$

Pre $c=\sqrt{2}$ je

$$\sqrt{a\cdot b\cdot c}=99\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}},$$

čo nie je prirodzené číslo. Anna teda má pravdu.

Pre $c=98$ je

$$\sqrt{a\cdot b\cdot c}=99\sqrt{2}\cdot\sqrt{98}=99\sqrt{2\cdot2\cdot7\cdot7}=99\cdot2\cdot7,$$

čo je prirodzené číslo. Dana teda má pravdu.

Napr. pre $c=4$ je

$$\sqrt{a\cdot b\cdot c}=99\sqrt{2}\cdot2,$$

čo nie je prirodzené číslo. Hana teda nemá pravdu.

Pre $c=98$ sme už ukázali, že $\sqrt{a\cdot b\cdot c}$ je prirodzené číslo. Ďalej napr. pre $c=2$ je

$$\sqrt{a\cdot b\cdot c}=99\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=99\cdot2,$$

čo je prirodzené číslo. Jana teda nemá pravdu.

Iné riešenie. Aby výraz (1) predstavoval prirodzené číslo, muselo by byť

$$\sqrt{c}=\sqrt{2}\cdot k,\quad\text{čiže}\quad c=2\cdot k^2 \tag{2}$$

pre nejaké prirodzené číslo k.

Keďže $c=\sqrt{2}$ nie je tvaru (2), Anna má pravdu.

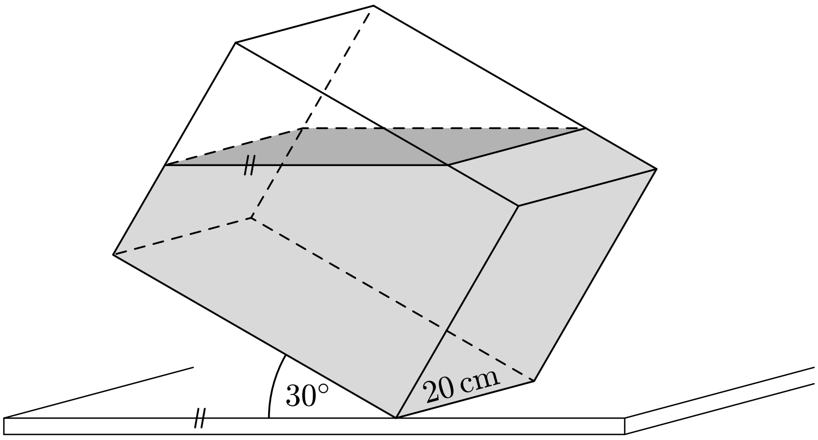
Keďže $c=98=2\cdot7^2$ je tvaru (2), Dana má pravdu.

Keďže nie každé párne číslo je tvaru (2), Hana nemá pravdu.

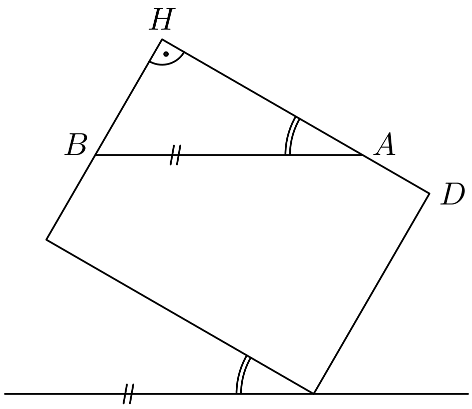
Keďže čísel tvaru (2) je nekonečne veľa, Jana nemá pravdu.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za zhodnotenie výrokov Anny a Dany; po 2 bodoch za zhodnotenie výrokov Hany a Jany. Odpovede bez zdôvodnenia nehodnoťte, aj keby boli správne.

4. *Kváder s rozmermi* 20 cm × 30 cm × 40 cm *je položený tak, že hrana dĺžky* 20 cm *leží na stole a hrana dĺžky* 40 cm *zviera so stolom uhol* 30°. *Kváder je čiastočne naplnený vodou, ktorá omáča hornú stenu s rozmermi* 20 cm×40 cm *z jednej štvrtiny. Určte objem vody v kvádri.* (Marie Krejčová)



Riešenie. Objem vody v kvádri možno určiť ako rozdiel objemu kvádra a objemu jeho prázdnej časti. Objem kvádra je $2 \cdot 3 \cdot 4\ \mathrm{dm}^3$, t. j. 24 litrov. Prázdnu časť kvádra tvorí trojboký hranol, ktorého podstavou je pravouhlý trojuholník a ktorého výška meria 2 dm. Stačí určiť obsah pravouhlého trojuholníka ABH:



Hornú stenu kvádra omáča voda z jednej štvrtiny. To znamená, že hrana DH dĺžky 4 dm je rozdelená vodnou hladinou v bode A vzdialenom 1 dm od bodu D, čiže 3 dm od bodu H. Vodná hladina je rovnobežná s rovinou stola a protiľahlé hrany kvádra sú navzájom rovnobežné, preto má uhol BAH veľkosť 30°. Pravý uhol je pri vrchole H, na zvyšný uhol pri vrchole B tak ostáva 60°.

Trojuholník ABH môžeme chápať ako polovicu rovnostranného trojuholníka rozdeleného výškou AH. Dĺžka strany BH je preto polovičná vzhľadom na dĺžku AB. Ak veľkosť strany BH v dm označíme x, tak podľa Pytagorovej vety v trojuholníku ABH platí

$$3^2 + x^2 = (2x)^2.$$

Z toho vyplýva $3x^2 = 9$, čiže $x = \sqrt{3}$. Obsah pravouhlého trojuholníka ABH je teda rovný $\frac{3\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{dm}^2$.

Objem trojbokého hranola predstavujúceho prázdnu časť kvádra je $2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{dm}^3$, čo je približne 5,2 litrov. Objem vody v kvádri je $24 - 3\sqrt{3}\ \mathrm{dm}^3$, čo je približne 18,8 litrov.

Návrh hodnotenia. 2 body za úvodnú úvahu a dĺžku úsečky AH, resp. AD; 3 body za dĺžku úsečky BH a obsah trojuholníka ABH; 1 bod za dopočítanie a prípadné zaokrúhlenie.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018