2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *Hovoríme, že tri navzájom rôzne prirodzené čísla tvoria súčtovú trojicu, ak súčet prvých dvoch z nich sa rovná tretiemu číslu. Zistite, aký najväčší počet súčtových trojíc sa môže nachádzať v množine dvadsiatich prirodzených čísel.* (P. Černek)

Riešenie. Pre ľubovoľne vybraných dvadsať prirodzených čísel

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{20}$$

odhadneme, koľko medzi nimi môže byť súčtových trojíc, teda trojíc $\{x_i, x_j, x_k\}$ spĺňajúcich podmienky $1 \leqq i < j < k \leqq 20$ a $x_i + x_j = x_k$, a to najprv pri pevnom indexe $k \in \{3, 4, \ldots, 20\}$. Nech sú to trojice $\{x_{i_1}, x_{j_1}, x_k\}$, $\{x_{i_2}, x_{j_2}, x_k\}$, $\ldots$, $\{x_{i_p}, x_{j_p}, x_k\}$. Potom čísla

$$x_{i_1}, x_{j_1}, x_{i_2}, x_{j_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{j_p}$$

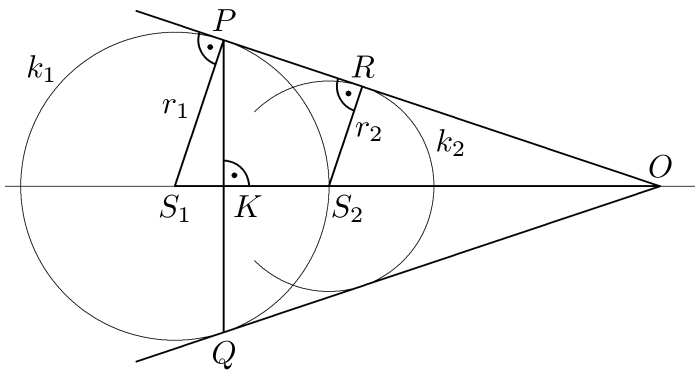
sú navzájom rôzne a všetky ležia v množine $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\}$, takže pre ich počet $2p$ platí odhad $2p \leqq k - 1$, odkiaľ $p \leqq \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ (kde $\lfloor a \rfloor$ značí celú časť čísla a). Preto počet všetkých súčtových trojíc nemôže byť číslo väčšie ako súčet

$$\sum_{k=3}^{20} \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \ldots + 9 + 9 = 90.$$

Príklad množiny $\mathsf{M} = \{1, 2, \ldots, 20\}$ ukazuje, že počet 90 súčtových trojíc je dosiahnuteľný, lebo pri každom $k \in \{3, 4, \ldots, 20\}$ môžeme za číslo i vybrať ľubovoľné číslo z množiny $\{1, 2, \ldots, \lfloor (k-1)/2 \rfloor\}$; zodpovedajúce celé číslo $j = k - i$ potom skutočne spĺňa nerovnosti $i < j < k$, takže $\{i, j, k\}$ je súčtová trojica ležiaca v M.

2. *V rovine sú dané kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $S_2 \in k_1$ a $r_1 > r_2$. Spoločné dotyčnice oboch kružníc sa dotýkajú kružnice k_1 v bodoch P a Q. Dokážte, že priamka PQ sa dotýka kružnice k_2.* (J. Földes)

Riešenie. Zo súmernosti spoločných dotyčníc vyplýva, že body dotyku P a Q sú súmerne združené podľa priamky S_1S_2, takže platí $PQ \perp S_1S_2$. Priamka PQ preto bude dotyčnicou ku kružnici k_2, keď ukážeme, že priesečník K priamok PQ a S_1S_2 leží na kružnici k_2 (obr. 1). Označme ešte O priesečník oboch dotyčníc s priamkou S_1S_2



Obr. 1

a R bod dotyku dotyčnice PO s kružnicou k_2. Z podobných pravouhlých trojuholníkov S_1OP a S_2OR vyplýva pomer

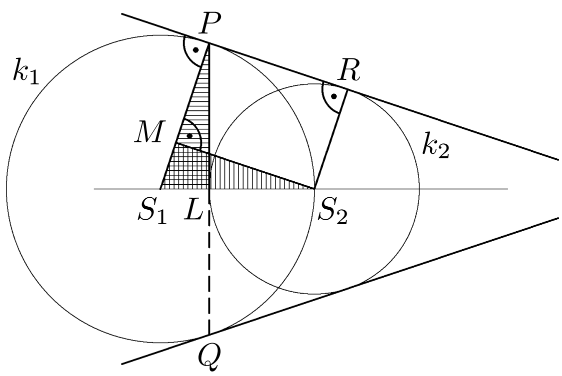
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{|S_1P|}{|S_2R|} = \frac{|S_1O|}{|S_2O|} = \frac{|S_1O|}{|S_1O| - r_1}, \quad \text{odkiaľ} \quad |S_1O| = \frac{r_1^2}{r_1 - r_2}.$$

Z Euklidovej vety o odvesne S_1P trojuholníka S_1OP preto vyplýva, že

$$r_1^2 = |S_1P|^2 = |S_1K| \cdot |S_1O| = |S_1K| \, \frac{r_1^2}{r_1 - r_2},$$

teda $|S_1K| = r_1 - r_2$, a preto $|S_2K| = |S_1S_2| - |S_1K| = r_1 - (r_1 - r_2) = r_2$. To znamená, že bod K skutočne leží na kružnici k_2 a dôkaz tvrdenia je hotový.

Iné riešenie. Označme L priesečník kružnice k_2 s úsečkou S_1S_2, M pätu kolmice spustenej z bodu S_2 na úsečku S_1P a R bod dotyku kružnice k_2 s tou spoločnou dotyčnicou, ktorá prechádza bodom P (obr. 2). Pretože S_2RPM je pravouholník, platí $|MP| = |S_2R| = r_2$, a preto $|S_1M| = |S_1P| - |MP| = r_1 - r_2$. Rovnakú dĺžku $r_1 - r_2$

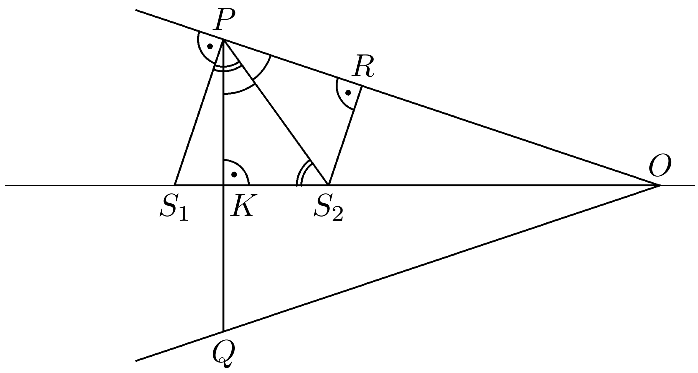


Obr. 2

má tiež úsečka S_1L, lebo $r_1 = |S_1S_2|$ a $r_2 = |S_2L|$. Trojuholníky S_1MS_2 a S_1LP majú teda zhodné uhly pri vrchole S_1 aj priľahlé strany, sú preto zhodné podľa vety *sus*. Platí teda nielen $S_1M \perp S_2M$, ale aj $S_1L \perp PL$. Bod L však leží na kružnici k_2, takže priamka PL je jej dotyčnicou, ktorá s ohľadom na súmernosť prechádza taktiež bodom Q. Dôkaz je skončený.

Iné riešenie. Označme O priesečník oboch dotyčníc, K pätu kolmice z bodu P na OS_1 (vzhľadom na súmernosť oboch dotyčníc podľa spojnice S_1S_2 je to priesečník

PQ s OS_1) a R pätu kolmice z bodu S_2 na OP (obr. 3). Pretože $|S_1P| = |S_1S_2| = r_1$,



Obr. 3

platí $|\measuredangle S_1PS_2| = |\measuredangle S_1S_2P|$, preto

$$\begin{aligned}|\measuredangle S_2PK| &= 90^\circ - |\measuredangle S_1S_2P| = \\ &= 90^\circ - |\measuredangle S_1PS_2| = |\measuredangle S_2PR|,\end{aligned}$$

takže pravouhlé trojuholníky KS_2P a RS_2P sa zhodujú v prepone S_2P a priľahlom uhle pri vrchole P. Preto $|S_2K| = |S_2R|$ a kružnica so stredom S_2 a polomerom $r_2 = |S_2R|$ sa dotýka spojnice PQ v bode K.

---

3. *Zistite, pre ktoré reálne čísla p majú rovnice*

$$x^3 + x^2 - 36x - p = 0,$$
$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = 0$$

spoločný koreň. (*P. Černek*)

Riešenie. Ľavú stranu druhej rovnice upravíme na súčin.

$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = x^2(x-2) - p(x-2) = (x-2)(x^2-p).$$

Pre spoločný koreň x oboch rovníc teda platí $x = 2$ alebo $x^2 = p$. V prvom prípade po dosadení do prvej rovnice dostaneme

$$2^3 + 2^2 - 36 \cdot 2 - p = 0, \quad \text{čiže} \quad p = -60;$$

v druhom prípade môžeme prvú rovnicu zjednodušiť na tvar $x^3 - 36x = 0$, odkiaľ vyplýva $x = 0$ alebo $x = \pm 6$, a preto z podmienky $p = x^2$ vychádza $p = 0$ resp. $p = 36$.

Dodajme, že po nájdení rozkladu ľavej strany druhej rovnice sme mohli vypísať jej korene $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{p}$ a po ich postupnom dosadení do prvej rovnice určiť hľadané hodnoty $p = -60$, $p = 0$ a $p = 36$.

Iné riešenie. Z prvej rovnice ľahko vyjadríme $p = x^3 + x^2 - 36x$ a dosadením do druhej rovnice dostaneme rovnicu

$$x^3 - 2x^2 - (x^3 + x^2 - 36x)x + 2(x^3 + x^2 - 36x) = 0.$$

(bez parametra p), ktorú musí spĺňať spoločný koreň oboch pôvodných rovníc. Po úprave dostaneme rovnicu $x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 72x = 0$, ktorej korene ľahko určíme (sú to totiž celé čísla) napríklad postupným rozkladom

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 72x &= x[x^2(x-2) - 36(x-2)] = x(x-2)(x^2-36) = \\ &= x(x-2)(x-6)(x+6). \end{aligned}$$

Vidíme, že spoločným koreňom musí byť jedno z čísel $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = -6$. Keď ich dosadíme do pôvodných rovníc, ihneď zistíme príslušné hodnoty p; sú to čísla 0, -60 a 36 (posledné zodpovedá obom koreňom $x_{3,4} = \pm 6$).

Iné riešenie. Spoločné korene mnohočlenov

$$P_1(x) = x^3 + x^2 - 36x - p, \quad P_2(x) = x^3 - 2x^2 - px + 2p$$

(ak vôbec existujú) sú korene mnohočlena, ktorý je najväčším spoločným deliteľom mnohočlenov P_1 a P_2. Nájdeme ho Euklidovým algoritmom postupného delenia zo zvyškom. V prvých dvoch krokoch dostaneme ako zvyšky mnohočleny

$$\begin{aligned} &P_3(x) = P_1(x) - P_2(x) = 3x^2 + (p-36)x - 3p, \\ &P_4(x) = P_2(x) - \left(\frac{x}{3} + \frac{30-p}{9}\right) P_3(x) = (p-36)\left(\frac{(p-30)x}{9} - \frac{p}{3}\right). \end{aligned}$$

V prípade, keď $p = 36$, je algoritmus skončený; najväčší spoločný deliteľ je vtedy rovný $P_3(x) = 3x^2 - 3 \cdot 36 = 3(x-6)(x+6)$, takže mnohočleny P_1, P_2 majú dva spoločné korene $x = \pm 6$. Ďalej preto predpokladajme, že $p \neq 36$. Jediný kandidát na spoločný koreň mnohočlenov P_1, P_2 je koreň mnohočlena P_4, teda číslo $x = 3p/(p-30)$. Stačí iba zistiť, kedy je toto číslo koreňom mnohočlena P_3. Pretože

$$P_3\left(\frac{3p}{p-30}\right) = \frac{9p(p+60)}{(p-30)^2},$$

majú požadovanú vlastnosť iba hodnoty $p = 0$ a $p = -60$ (ktorým zodpovedá spoločný koreň $x = 0$ resp. $x = 2$).