2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

1. *Nájdite základy z všetkých číselných sústav, v ktorých je štvormiestne číslo* $(1001)_z$ *deliteľné dvojmiestnym číslom* $(41)_z$. (*P. Černek*)

Riešenie. Pretože v zápise dvojmiestneho čísla vystupuje číslica 4, nutne platí $z \geqq 5$. Z rozvinutých zápisov $(1001)_z = z^3 + 1$ a $(41)_z = 4z + 1$ vyplýva, že hľadáme práve tie prirodzené $z \geqq 5$, pre ktoré je číslo $z^3 + 1$ násobkom čísla $4z + 1$. Pomocou Euklidovho algoritmu nájdeme ich najväčší spoločný deliteľ. Môžeme postupovať tak, že najprv vydelíme oba výrazy ako mnohočleny a potom sa „zbavíme“ zlomkov.

$$z^3 + 1 = \left(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4^2}z + \frac{1}{4^3}\right)(4z+1) + \frac{63}{4^3}, \qquad / \cdot 4^3$$

$$4^3(z^3+1) = (16z^2 - 4z + 1)(4z+1) + 63. \tag{1}$$

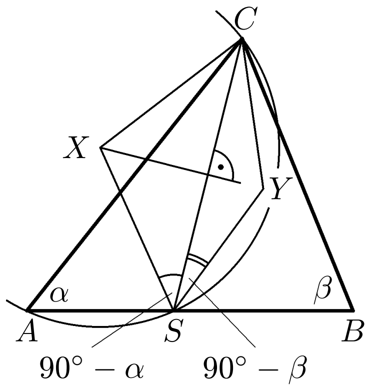
Pretože čísla 4 a $4z + 1$ sú nesúdeliteľné, vidíme odtiaľ, že číslo $4z + 1$ delí číslo $z^3 + 1$, práve vtedy, keď delí číslo 63, teda práve vtedy, keď $4z + 1 \in \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$. Z podmienky $z \geqq 5$ však vyplýva $4z + 1 \geqq 21$, takže $4z + 1 = 21$ (rovnica $4z + 1 = 63$ nemá celočíselné riešenie) a $z = 5$.

Poznámka. Rozklad (1) tiež ľahko odhalíme, keď využijeme známy vzorec $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Podľa neho môžeme rovno písať

$$4^3(z^3 + 1) = (4^3z^3 + 1) + 63 = (4z + 1)(16z^2 - 4z + 1) + 63.$$

2. *Vnútri strany AB daného ostrouhlého trojuholníka ABC nájdite bod S tak, aby trojuholník SXY, kde X a Y sú postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom ASC a BSC, mal najmenší možný obsah.* (*P. Černek*)

Riešenie. Vnútorné uhly trojuholníka ABC označme ako zvyčajne α, β, γ. Podľa vety o obvodovom a stredovom uhle v kružnici opísanej trojuholníku ASC platí (obr. 1)



Obr. 1

$|\measuredangle SXC| = 2\alpha$, takže uhol pri základni SC rovnoramenného trojuholníka SCX má veľkosť $|\measuredangle XSC| = (180° - 2\alpha)/2 = 90° - \alpha$ (využili sme predpoklad, že α je ostrý uhol). Analogicky sa odvodí rovnosť $|\measuredangle YSC| = 90° - \beta$. Pretože uhly pri vrcholoch A a C trojuholníka ASC sú ostré, je stred X vnútorným bodom uhla ASC; podobne je stred Y vnútorným bodom uhla BSC. Preto možno vyjadriť veľkosť uhla XSY ako súčet veľkostí uhlov XSC a YSC.

$$|\measuredangle XSY| = |\measuredangle XSC| + |\measuredangle YSC| = (90° - \alpha) + (90° - \beta) = \gamma.$$

Ak označíme ešte $\omega = |\measuredangle ASC|$, potom pre polomery kružníc opísaných trojuholníkom ASC a BSC platia vzťahy

$$|SX| = \frac{|AC|}{2\sin\omega} \quad \text{a} \quad |SY| = \frac{|BC|}{2\sin(180° - \omega)} = \frac{|BC|}{2\sin\omega},$$

ktoré spolu so skôr určenou veľkosťou uhla XSY vedú k nasledujúcej závislosti medzi obsahmi S_{SXY} a S_{ABC} trojuholníkov SXY a ABC:

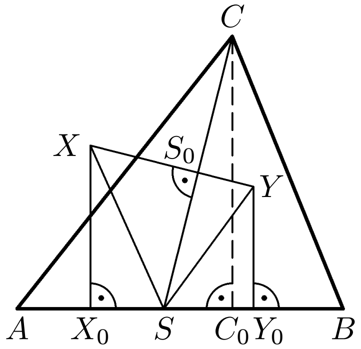
$$S_{SXY} = \frac{|SX| \cdot |SY| \cdot \sin|\measuredangle XSY|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\gamma}{8\sin^2\omega} = \frac{S_{ABC}}{4\sin^2\omega}.$$

Odtiaľ vyplýva nerovnosť $S_{SXY} \geqq S_{ABC}/4$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $\sin\omega = 1$, čiže $\omega = 90°$. Obsah trojuholníka SXY je preto najmenší práve vtedy, keď je bod S pätou výšky z vrcholu C na stranu AB. (Táto päta je vnútorným bodom strany AB vďaka podmienke, že trojuholník ABC je ostrouhlý.)

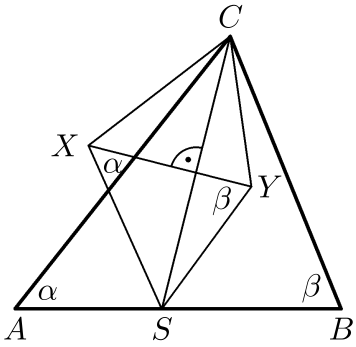
Iné riešenie. Spojnica XY stredov oboch opísaných kružníc pretína spoločnú tetivu CS v jej stredu S_0 a kolmé priemety X_0, Y_0 bodov X, Y na stranu AB sú stredmi úsečiek AS, SB (obr. 2). Preto $|X_0Y_0| = |AB|/2$ a pre obsah trojuholníka SXY platí

$$\begin{aligned} S_{SXY} &= \frac{1}{2}|XY| \cdot |S_0S| \geqq \frac{1}{2}|X_0Y_0| \cdot |S_0S| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{1}{2}|CS| \geqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CC_0| = \frac{1}{4}S_{ABC}, \end{aligned}$$

kde CC_0 je výška trojuholníka ABC. Rovnosť v prvej z predchádzajúcich dvoch nerovností nastane práve vtedy, keď $XY \parallel AB$, t. j. práve vtedy, keď $CS \perp AB$, čiže $S = C_0$. A práve vtedy prejde na rovnosť aj druhá nerovnosť.



Obr. 2



Obr. 3

Iné riešenie. Priesečníky C a S kružníc opísaných trojuholníkom ASC a BSC sú súmerne združené podľa priamky XY, takže pre veľkosť uhla SXY platí (obr. 3)

$$|\measuredangle SXY| = \frac{1}{2}|\measuredangle SXC| = \frac{1}{2}\cdot 2|\measuredangle BAC| = |\measuredangle BAC|,$$

podobne $|\measuredangle SYX| = |\measuredangle ABC|$. Preto sú trojuholníky SXY a CAB podobné podľa vety uu, takže ich obsahy S_{SXY} a S_{ABC} sú pomocou koeficientu podobnosti $k = |XS| : |AC|$ zviazané rovnosťou $S_{SXY} = k^2 S_{ABC}$. Pretože úsečka AC je tetivou kružnice s polomerom $|XS|$, platí nerovnosť $|AC| \leqq 2|XS|$, čiže $k \geqq 1/2$; rovnosť $k = 1/2$ pritom nastane len vtedy, keď je strana AC priemerom kružnice opísanej trojuholníku ASC, čo je ekvivalentné s podmienkou $CS \perp AB$. Tým je dokázaná nerovnosť $S_{SXY} \geqq S_{ABC}/4$ aj nájdená podmienka, kedy nastane rovnosť.

---

3. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\log_x(y+z) = p,$$
$$\log_y(z+x) = p,$$
$$\log_z(x+y) = p$$

s neznámymi x, y, z a nezáporným celočíselným parametrom p. (*J. Švrček*)

Riešenie. Rovnice danej sústavy majú zmysel len vtedy, keď sú čísla x, y, z kladné a rôzne od 1. Pre také čísla x, y, z (iné ďalej neuvažujeme) dostávame odlogaritmovaním ekvivalentnú sústavu rovníc

$$y+z = x^p, \quad z+x = y^p, \quad x+y = z^p. \tag{1}$$

Ukážeme najprv, že v obore $\mathsf{M} = (0,1) \cup (1,\infty)$ je každé riešenie sústavy (1) tvorené trojicou rovnakých čísel. Využijeme na to známy poznatok, že pre $p \geqq 0$ je funkcia $f(t) = t^p$ na množine kladných čísel t neklesajúca (presnejšie rastúca pre $p > 0$ a konštantná pre $p = 0$). Predpokladajme naopak, že pre niektoré riešenie (x,y,z) platí napríklad $x < y$. Odpočítaním prvých dvoch rovníc z (1) dostaneme $y - x = x^p - y^p$. Z predpokladu $x < y$ ale vyplýva $x^p \leqq y^p$, takže $y - x > 0$ a zároveň $x^p - y^p \leqq 0$, čo je v spore s predchádzajúcou rovnosťou. Podobne odvodíme spor aj v prípade, keď $x > y$, a v prípadoch, keď $x \neq z$ resp. $y \neq z$ (sústava (1) je totiž v neznámych x, y, z symetrická).

Sústava (1) sa preto redukuje na rovnicu $x + x = x^p$, ktorú máme riešiť v obore $\mathsf{M} = (0,1) \cup (1,\infty)$. Pretože $x \neq 0$, dostávame po delení číslom x ekvivalentnú rovnicu $2 = x^{p-1}$. Táto rovnica nemá riešenie pre $p = 1$, pre $p = 0$ má jediné riešenie $x = 1/2$, pre prirodzené $p \geqq 2$ má jediné riešenie $x = 2^{1/(p-1)}$, ktoré možno pre $p \geqq 3$ zapísať ako $x = \sqrt[p-1]{2}$. (Čísla $1/2$ aj $2^{1/(p-1)}$ zrejme patria do M.)

Odpoveď. Daná sústava má pre $p = 0$ jediné riešenie $x = y = z = 1/2$, pre $p = 1$ nemá riešenie, pre prirodzené $p \geqq 2$ má jediné riešenie $x = y = z = 2^{1/(p-1)}$.

4. *Postupnosť* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *s prvým členom* $x_1 = 1$ *spĺňa pre každé* $n > 1$ *podmienku*

$$x_n = x_{n-1}^{\pm 1} + x_{n-2}^{\pm 1} + \ldots + x_1^{\pm 1}$$

s vhodnou voľbou znamienok „+" a „−" v exponentoch mocnín.

a) Rozhodnite, či niektorý člen takej postupnosti musí byť väčší ako $1\,000$.

b) Zistite najmenšiu možnú hodnotu člena $x_{1\,000\,000}$.

c) Dokážte, že nerovnosť $x_n < 4$ *nemôže platiť pre deväť členov* x_n *takej postupnosti.* (J. Földes)

Riešenie. Na úvod si všimneme, že v dôsledku rovnosti $x_1 = 1$ platí

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1^{\pm 1} = 1^{\pm 1} = 1, \\ x_3 &= x_2^{\pm 1} + x_1^{\pm 1} = 1^{\pm 1} + 1^{\pm 1} = 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Pretože pre každé $x > 0$ sú obe čísla x^{+1}, x^{-1} kladné, vyplýva odtiaľ jednoducho matematickou indukciou, že nerovnosť $x_n \geqq 1$ je splnená pre každé n. Ale ak $x \geqq 1$, potom $0 < x^{-1} \leqq x^1$, a preto pre každé $n \geqq 4$ platia odhady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x_4} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} \leqq x_n \leqq 1 + 1 + 2 + x_4 + \ldots + x_{n-1}, \tag{2}$$

ktoré využijeme vo všetkých troch častiach riešenia.

a) Dokážeme (sporom), že existuje k, pre ktoré $x_k > 10^3$. Predpokladajme naopak, že pre každé k platí opačná nerovnosť $x_k \leqq 10^3$. Z ľavej nerovnosti v (2) potom pre každé $n > 4$ vyplýva odhad

$$x_n \geqq \frac{5}{2} + \underbrace{10^{-3} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-3}}_{(n-4)\text{ krát}} = \frac{5}{2} + (n-4) \cdot 10^{-3}.$$

Odtiaľ ale vyplýva, že $x_n > 10^3$ pre každé $n > 10^6 + 4$, čo je spor.

b) Dokážeme najskôr, že z pravých nerovností v (2) vyplýva odhad $x_n \leqq 2^{n-2}$ pre každé $n \geqq 2$. Využijeme indukciu. Pre $n = 2$ aj pre $n = 3$ platí podľa (1) rovnosť $x_n = 2^{n-2}$; nech $n \geqq 4$ a nech pre všetky $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ platí $x_k \leqq 2^{k-2}$, potom z (2) dostávame

$$x_n \leqq 1 + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-3}) = 1 + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-2}.$$

Tým je dôkaz indukciou ukončený. Keď dosadíme odhady $x_n \leqq 2^{n-2}$ do ľavej nerovnosti v (2), vyjde nám pre hodnotu x_{10^6} dolný odhad

$$x_{10^6} \geqq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{10^6-3}} = 3 - \frac{1}{2^{10^6-3}}.$$

To spolu s príkladom vyhovujúcej postupnosti

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_1 \quad (n \in \{2, 3, \ldots, 10^6 - 1\}), \\ x_{10^6} &= x_{10^6-1}^{-1} + x_{10^6-2}^{-1} + \ldots + x_2^{-1} + x_1^{-1}, \end{aligned}$$

v ktorej $x_n = 2^{n-2}$ pre každé $n \in \{2, 3, \dots, 10^6 - 1\}$ a $x_{10^6} = 3 - 2^{3-10^6}$, ukazuje, že najmenšia možná hodnota člena x_{10^6} je rovná $3 - 2^{3-10^6}$.

c) Predpokladajme, že nerovnosť $x_n < 4$ platí okrem troch hodnôt $n \in \{1, 2, 3\}$ ešte pre niektoré ďalšie n, ktoré označíme $n_4, n_5, n_6, \dots$ tak, že $4 \leqq n_4 < n_5 < n_6 < \dots$ (zatiaľ ešte nevieme, či ide o konečnú alebo nekonečnú postupnosť). Ukážme, že pre každé také n_k sú vo všetkých exponentoch príslušnej rovnosti

$$x_{n_k} = 1 + 1 + 2^{\pm 1} + x_4^{\pm 1} + x_5^{\pm 1} + \dots + x_{n_k - 1}^{\pm 1}$$

vybrané znamienka „mínus“. Pre mocninu $2^{\pm 1}$ je to zrejmé, lebo $x_{n_k} < 4$; z rovnakej nerovnosti ďalej vyplýva, že znamienko v exponente ktorejkoľvek mocniny $x_j^{\pm 1}$ ($4 \leqq j \leqq n_k - 1$) musí byť vybrané tak, aby platilo

$$x_j^{\pm 1} < 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}.$$

Táto nerovnosť však môže byť splnená iba so znamienkom „mínus“, lebo podľa (2) máme $x_j \geqq 5/2$. Tým je tvrdenie o výbere znamienok dokázané. Porovnaním dvoch za sebou idúcich rovností

$$\begin{aligned} x_{n_k} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \dots + \frac{1}{x_{n_k - 1}}, \\ x_{n_{k+1}} &= \frac{5}{2} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \dots + \frac{1}{x_{n_k - 1}} + \frac{1}{x_{n_k}} + \dots + \frac{1}{x_{n_{k+1} - 1}} \end{aligned}$$

dostaneme pre všetky $k \geqq 4$ nerovnosti

$$x_{n_{k+1}} \geqq x_{n_k} + \frac{1}{x_{n_k}},$$

ktoré s prihliadnutím k tomu, že funkcia $f(t) = t + 1/t$ je na intervale $t \in \langle 1, \infty)$ rastúca a že $x_{n_4} \geqq 2{,}5$, vedú postupne k odhadom

$$x_{n_5} \geqq f(2{,}5) = 2{,}9, \quad x_{n_6} \geqq f(2{,}9) > 3{,}24, \quad x_{n_7} > f(3{,}24) > 3{,}54,$$
$$x_{n_8} > f(3{,}54) > 3{,}82, \quad x_{n_9} \geqq f(3{,}82) > 4{,}08.$$

Posledná nerovnosť je ale v spore s podmienkou $x_{n_k} < 4$ určujúcou výber indexov n_k. Preto nerovnosť $x_n < 4$ nemôže platiť pre deväť indexov n.