2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh domáceho kola kategórie B*

1. *Palindrómom rozumieme prirodzené číslo, ktoré sa číta rovnako odpredu aj odzadu, napr. 16 261. Nájdite najväčší štvormiestny palindróm, ktorého druhá mocnina je tiež palindrómom.* (*E. Kováč*)

Riešenie. Každý štvormiestny palindróm $p = \overline{abba}$ sa dá zapísať v tvare

$$p = a \cdot 1001 + b \cdot 110,$$

kde $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ a $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Potom druhá mocnina čísla $\overline{abba}$ má tvar

$$\begin{aligned} p^2 &= a^2 \cdot 1\,002\,001 + 2ab \cdot 110\,110 + b^2 \cdot 12\,100 = \\ &= a^2 \cdot 10^6 + 2ab \cdot 10^5 + (b^2 + 2ab) \cdot 10^4 + \\ &\quad + (2a^2 + 2b^2) \cdot 10^3 + (b^2 + 2ab) \cdot 10^2 + 2ab \cdot 10^1 + a^2. \end{aligned}$$

Posledná číslica čísla p^2 je teda rovnaká ako posledná číslica čísla a^2.

Pre $a \geqq 4$ je číslo p^2 nutne osemmiestne. Jeho prvá číslica je rovná jednej z hodnôt c, $c+1$, $c+2$, kde c je prvá číslica dvojmiestneho čísla a^2. (Maximálny prenos z nižšieho rádu je rovný číslu 2.) Ak je ale dané číslo opäť palindróm, je jeho prvá aj posledná číslica rovnaká. Porovnaním prvej a poslednej číslice u čísel 16, 25, 36, 49, 64, 81 vidíme, že žiadne z nich nie je tvaru $\overline{c(c+2)}$, $\overline{c(c+1)}$ alebo $\overline{cc}$.

Ak $a = 3$ a $b \geqq 2$, je číslo p^2 opäť osemmiestne, jeho posledná číslica je 9 a prvá je 1, nejedná sa teda o palindróm.

Vo všetkých ostatných prípadoch je číslo p^2 sedemmiestne. Pretože a^2 je iba jednomiestne a zápis čísla p^2 je symetrický, musia byť nutne všetky tri hodnoty $2ab$, $2ab + b^2$, $2a^2 + 2b^2$ menšie ako 10, aby nedošlo k prenosu do vyššieho rádu. Diskutujme tri prípady:

- $a = 3$: nerovnici $2 \cdot 3^2 + 2b^2 < 10$ nevyhovuje žiadne b,
- $a = 2$: nerovnici $2 \cdot 2^2 + 2b^2 < 10$ vyhovuje iba $b = 0$,
- $a = 1$: nerovnici $2 \cdot 1^2 + 2b^2 < 10$ vyhovuje iba $b = 0$, $b = 1$.

Záver. Najväčším štvormiestnym palindrómom spĺňajúcim podmienky úlohy je číslo 2 002.

2. *Nájdite všetky trojice reálnych čísel (x, y, z) vyhovujúcich sústave rovníc*

$$x^3 + y^3 = 9z^3,$$
$$x^2y + y^2x = 6z^3.$$

(*J. Zhouf*)

Riešenie. Keď pripočítame k prvej rovnici trojnásobok rovnice druhej, získame rovnicu

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 27z^3.$$

Jej úpravou dostaneme

$$(x + y)^3 = (3z)^3, \qquad \text{t.j.} \qquad x + y = 3z.$$

Dosadením tohto výrazu do ľavej strany druhej rovnice sústavy dostaneme

$$x^2y + xy^2 = xy(x+y) = 3xyz, \quad \text{t. j.} \quad 3xyz = 6z^3.$$

Rozlíšime dva prípady.

Ak $z = 0$, je posledná rovnica splnená pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$. Z prvej rovnice sústavy získame $x^3 + y^3 = 0$, t. j. $y = -x$. Riešením je každá trojica $(t, -t, 0)$, kde t je ľubovoľné reálne číslo.

Ak $z \neq 0$, tak $xy = 2z^2$. Spolu s rovnicou $x + y = 3z$ dostávame sústavu

$$\begin{aligned} x + y &= 3z, \\ xy &= 2z^2 \end{aligned}$$

dvoch rovníc o dvoch neznámych x, y s parametrom z. Elimináciou napr. neznámej y dostaneme kvadratickú rovnicu

$$x^2 - 3zx + 2z^2 = 0.$$

Zo vzťahov medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice získame riešenie v tvare $x = z$, $y = 2z$ alebo $x = 2z$, $y = z$. Riešením je teda každá trojica $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$, kde t je ľubovoľné reálne číslo (rôzne od nuly).

Záver. Sústava má riešenie $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$ pre každé $t \neq 0$, $(t, -t, 0)$ pre každé t a žiadne iné riešenie nemá.

Iné riešenie. Prvú rovnicu vynásobíme dvoma a odčítame od nej trojnásobok rovnice druhej (vylúčime tak neznámu z). Získame rovnicu

$$2x^3 + 2y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = 0.$$

Ľavú stranu rovnice postupne upravíme na tvar

$$\begin{aligned} 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3(x+y)xy &= 0, \\ (x+y)(2x^2 - 5xy + 2y^2) &= 0, \\ (x+y)(2x-y)(x-2y) &= 0. \end{aligned}$$

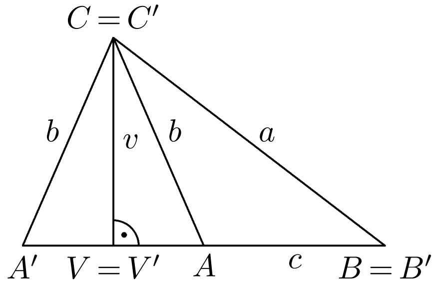
Môžu teda nastať tri prípady:

- $x + y = 0$, potom $y = -x$. Dosadením do prvej rovnice sústavy dostaneme $9z^3 = x^3 + (-x)^3 = 0$, t. j. $z = 0$.
- $2x - y = 0$, potom $y = 2x$. Dosadením do prvej rovnice sústavy dostaneme $9z^3 = x^3 + (2x)^3 = 9x^3$, t. j. $z = x$.
- $x - 2y = 0$, potom $x = 2y$. Dosadením do prvej rovnice sústavy dostaneme $9z^3 = (2y)^3 + y^3 = 9y^3$, t. j. $z = y$.

Záver. Riešením sú všetky trojice $(t, -t, 0)$, $(t, 2t, t)$ a $(2t, t, t)$, kde t je ľubovoľné reálne číslo.

3. *Je daný trojuholník so stranami dĺžok a, b, c a obsahom S. Dokážte, že rovnosť $2c^2 = |a^2 - b^2|$ platí práve vtedy, keď existuje trojuholník so stranami dĺžok a, b, $2c$ a obsahom $2S$.* (*P. Černek*)

Riešenie. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $a \geqq b$. Ak je obsah trojuholníka $A'B'C'$ so stranami dĺžok a, b, $2c$ rovný dvojnásobnému obsahu trojuholníka ABC so stranami dĺžok a, b, c, sú výšky CV a $C'V'$ týchto trojuholníkov zhodné. Trojuholníky ACV a $A'C'V'$ sú teda zhodné podľa vety *Ssu*, preto môžeme oba trojuholníky ABC a $A'B'C'$ premiestniť tak, aby platilo $B = B'$, $C = C'$ a $V = V'$; potom už však nemôže platiť $A = A'$. Ak je poloha bodov A a A' na priamke BV? Pretože $b = |AC| = |A'C|$, je trojuholník $AA'C$ rovnoramenný a jeho základňa AA' má stred v bode V (obr. 1). Predpoklad $a \geqq b$ znamená, že $|AC| = |A'C| \leqq |BC|$, takže



Obr. 1

bod B neleží na úsečke AA'; pretože $|AB| = c$ a $|A'B| = 2c$, leží bod B na polpriamke opačnej k AA' tak, že bod A je stredom úsečky $A'B$. Z pravouhlých trojuholníkov AVC a BVC vyplýva

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{3}{2}c\right)^2,$$
$$v^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2.$$

Porovnaním pravých strán dostaneme po úprave

$$a^2 - b^2 = 2c^2.$$

Ukázali sme tak, že ak k danému trojuholníku ABC existuje trojuholník so stranami a, b, $2c$ a obsahom $2S$, tak pre dĺžky a, b, c musí byť splnená rovnosť $|a^2 - b^2| = 2c^2$.

Predpokladajme naopak, že pre veľkosti strán a, b, c trojuholníka ABC platí $|a^2 - b^2| = 2c^2$. Najprv ukážeme, že trojuholník so stranami a, b, $2c$ existuje, t.j. že platí trojuholníková nerovnosť

$$a + b > 2c > |a - b|.$$

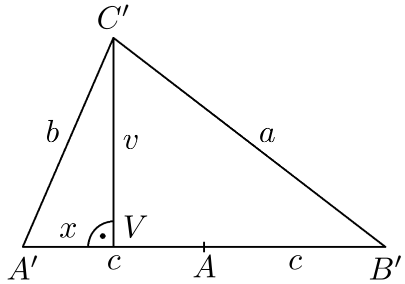
Pre trojuholník ABC platí trojuholníková nerovnosť $a + b > c > |a - b|$. Preto platí $2c > c > |a - b|$. Keď ďalej vynásobíme obe strany nerovnosti $c > |a - b|$ kladným výrazom $a + b$, obdržíme nerovnosť

$$c(a + b) > |a^2 - b^2| = 2c^2,$$

z ktorej po delení c vyplýva nerovnosť

$$a + b > 2c.$$

Predpokladajme teraz, že v trojuholníku $A'B'C'$ so stranami a, b, $2c$ platí rovnosť $2c^2 = a^2 - b^2$ (opäť bez ujmy na všeobecnosti predpokladáme, že $a > b$ – tu nemôže byť $a = b$, pretože by bolo $c = 0$). Vysvetlíme, prečo päta V výšky z vrcholu C' na stranu $A'B'$ padne dovnútra tejto strany (a nie na jej predĺženie). K tomu stačí ukázať, že trojuholník $A'B'C'$ má ostré vnútorné uhly pri vrcholoch A' aj B' (obr. 2). Uhol $A'B'C'$ je menší ako uhol $B'A'C'$, lebo predpokladáme, že $a > b$. Uhol $B'A'C'$ je



Obr. 2

ostrý práve vtedy, keď platí nerovnosť $|B'C'|^2 < |A'B'|^2 + |A'C'|^2$, čiže $a^2 < 4c^2 + b^2$. Posledná nerovnosť je ale zaručená rovnosťou $a^2 = b^2 + 2c^2$. Z pravouhlých trojuholníkov $A'VC'$ a $B'VC'$ vyplýva, že pre dĺžky $x = |A'V|$ a $v = |C'V|$ platí

$$v^2 = b^2 - x^2,$$
$$v^2 = a^2 - (2c - x)^2.$$

Porovnaním pravých strán dostaneme po úprave

$$4cx = 4c^2 - (a^2 - b^2)$$

a dosadením za $a^2 - b^2$ vyjde

$$4cx = 4c^2 - 2c^2 = 2c^2, \qquad \text{t. j. } x = \frac{1}{2}c.$$

Keď označíme A (v súlade s prvou časťou) stred strany $A'B'$, platí

$$|AC'| = |A'C'| = b,$$

teda trojuholník $AB'C'$ má strany dĺžok a, b, c a obsah rovný polovici obsahu trojuholníka $A'B'C'$. Tým sme dokázali opačnú implikáciu.

Iné riešenie. Z Herónovho vzorca pre obsah S_1 trojuholníka ABC a pre obsah S_2 trojuholník $A'B'C'$ máme

$$S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big)},$$
$$S_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+b)^2 - 4c^2\big)\big(4c^2 - (a-b)^2\big)}.$$

Z podmienky $S_2 = 2S_1$ vyplýva

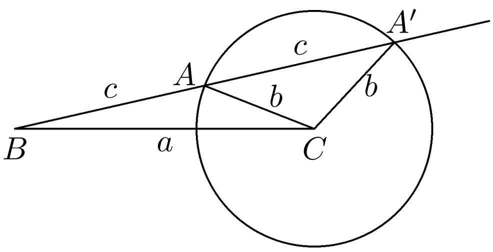
$$\bigl((a+b)^2 - 4c^2\bigr)\bigl(4c^2 - (a-b)^2\bigr) = 4\bigl((a+b)^2 - c^2\bigr)\bigl(c^2 - (a-b)^2\bigr).$$

Z tejto podmienky po úprave dostaneme

$$(a^2 - b^2)^2 = 4c^4, \quad \text{t. j.} \ \left|a^2 - b^2\right| = 2c^2.$$

Prevedené úpravy sú ekvivalentné, preto je možné celý postup obrátiť. Z rovnosti $|a^2 - b^2| = 2c^2$ vyplýva, že trojuholník $A'B'C'$ má dvakrát väčší obsah ako trojuholník ABC. Existencia trojuholníkov sa dá dokázať rovnakým postupom ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Uvažujme úsečku BC dĺžky a $(a > b)$ a kružnicu k so stredom v bode C a polomerom b (obr. 3). V rovnakej polrovine (s hraničnou priamkou BC)



Obr. 3

uvažujme body A a A', pre ktoré platí $|AB| = c$, $|A'B| = 2c$. Ak ležia body B, A a A' na jednej priamke, potom obsah trojuholníka $A'BC$ je dvojnásobkom obsahu trojuholníka ABC. Z mocnosti bodu B ku kružnici k vyplýva

$$|BA| \cdot |BA'| = 2c^2 = a^2 - b^2.$$

Ak je naopak splnená posledná rovnosť, pretne polpriamka opačná k AB kružnicu k v bode, ktorého vzdialenosť od bodu B je rovná $2c$, týmto bodom je však A'. Odtiaľ už vyplýva tvrdenie pre obsahy trojuholníkov. Existencia trojuholníkov sa dá dokázať rovnakým postupom ako v prvom riešení.

---

4. *Krokom budeme rozumieť nahradenie usporiadanej trojice celých čísel* (p, q, r) *trojicou* $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. *Rozhodnite, či existuje celé číslo* k *také, že z trojice* $(1, 3, 7)$ *vznikne po konečnom počte krokov trojica* $(k, k+1, k+2)$. (*P. Černek*)

Riešenie. Keď sčítame všetky tri čísla vzniknutej trojice, dostaneme

$$(r + 5q) + (3r - 5p) + (2q - 3p) = 4r + 7q - 8p = 3(r + 2q - 3p) + (p + q + r).$$

Toto číslo dáva po delení tromi rovnaký zvyšok ako číslo $(p+q+r)$, t. j. zvyšok po delení tromi súčtu čísel v trojici zostáva rovnaký. Pre trojicu $(1, 3, 7)$ je zvyšok rovný dvom $(1 + 3 + 7 = 11 = 3 \cdot 3 + 2)$. Súčet troch po sebe idúcich celých čísel je však deliteľný tromi, takže dáva zvyšok nula. Vyplýva to z rovnosti $k + (k+1) + (k+2) = 3(k+1)$.

Záver. Po konečnom počte *krokov* nemôžeme z trojice $(1, 3, 7)$ dostať trojicu po sebe idúcich celých čísel.

Iné riešenie. Skúmajme, ako sa mení parita trojice čísel v nasledujúcich *krokoch.* Na začiatku sú všetky tri čísla nepárne. Postupne dostávame

$$(n, n, n) \to (p, p, n) \to (n, n, p) \to (n, n, n) \to \cdots$$

Pretože sa parita čísel pravidelne mení podľa danej schémy, nemôžeme z trojice nepárnych čísel dostať trojicu (p, n, p), resp. (n, p, n), ktoré reprezentujú všetky trojice po sebe idúcich čísel (za párnym číslom nasleduje nepárne a naopak).

Iné riešenie. (Podľa *Miroslava Jagoša.*) Zistíme, ktorá trojica je bezprostredným predchodcom trojice $(k, k+1, k+2)$. Riešime sústavu rovníc

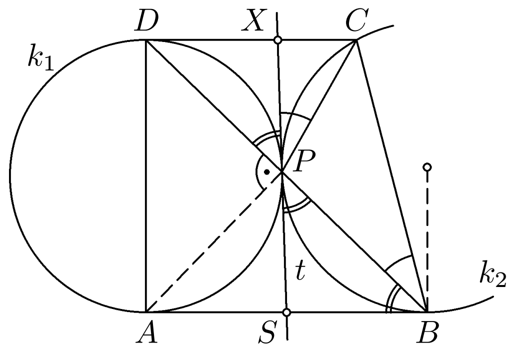
$$r + 5q = k, \qquad 3r - 5p = k + 1, \qquad 2q - 3p = k + 2.$$

Z druhej a tretej rovnice máme $9r - 10q = -2k - 7$ a po pripočítaní dvojnásobku prvej rovnice dostaneme $11r = -7$, teda r nie je celé. Pretože z celočíselnej trojice vznikne opäť celočíselná trojica, vyplýva odtiaľ, že trojica $(k, k+1, k+2)$ nemôže vzniknúť po konečnom počte *krokov* zo žiadnej celočíselnej trojice, teda ani z trojice $(1, 3, 7)$.

---

5. *V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Kružnica k_1 zostrojená nad stranou AD ako priemerom a kružnica k_2, ktorá prechádza vrcholmi B, C a dotýka sa priamky AB, majú vonkajší dotyk v bode P. Dokážte, že uhly CPD a ABC sú zhodné.* (J. Švrček)

Riešenie. Pretože úsečka AD je priemerom kružnice k_1, je uhol APD pravý (obr. 4). Uvažujme spoločnú dotyčnicu t oboch kružníc prechádzajúcu bodom P. Označme



Obr. 4

postupne S a X priesečníky dotyčnice t s úsečkami AB a CD. Priamka AB je ale tiež spoločnou dotyčnicou oboch kružníc. Platí preto $|SA| = |SP| = |SB|$. Bod S je preto stredom Tálesovej kružnice zostrojenej nad stranou AB ako priemerom. Uhol APB je preto rovnako ako uhol APD pravý a bod P je teda vnútorným bodom úsečky BD. Trojuholník BPS je rovnoramenný so základňou BP, pre jeho uhly teda platí $|\angle SBP| = |\angle SPB|$. Uhol SPB má naviac rovnakú veľkosť ako uhol DPX (dvojice vrcholových uhlov). Platí preto $|\angle ABP| = |\angle DPX|$. Súčasne však je uhol XPC uhlom úsekovým pre tetivu CP kružnice k_2. Z rovnosti obvodového a úsekového uhla máme $|\measuredangle PBC| = |\measuredangle XPC|$. Celkovo dostávame

$$|\measuredangle ABC| = |\measuredangle ABP| + |\measuredangle PBC| = |\measuredangle DPX| + |\measuredangle XPC| = |\measuredangle DPC|,$$

čo sme chceli dokázať.

---

6. *V karteziánskej sústave súradníc Ouv znázornite množinu všetkých bodov* $[u, v]$, *kde* $u > 0$, *pre ktoré má rovnica*

$$|x^2 - ux| + vx - 1 = 0$$

s neznámou x *práve tri rôzne reálne riešenia.* (J. Šimša)

Riešenie. Nulové body výrazu $x^2 - ux$ sú $x = 0$ a $x = u$. Pretože podľa zadania platí $u > 0$, rozdelíme reálnu os na tri navzájom disjunktné intervaly $I_1 = (-\infty, 0)$, $I_2 = \langle 0, u\rangle$ a $I_3 = (u, \infty)$.

Na intervaloch I_1 a I_3 riešime kvadratickú rovnicu

$$x^2 - (u - v)x - 1 = 0. \tag{1}$$

Táto rovnica má kladný diskriminant $(u - v)^2 + 4$, a teda dva rôzne reálne korene

$$x_1 = \frac{u - v - \sqrt{(u - v)^2 + 4}}{2},$$
$$x_2 = \frac{u - v + \sqrt{(u - v)^2 + 4}}{2}.$$

Pretože $\sqrt{(u - v)^2 + 4} > |u - v|$, platí $x_1 < 0$ a $x_2 > 0$. Znamená to, že číslo x_1 je vždy riešením rovnice (1), lebo $I_1 = (-\infty, 0)$, zatiaľ čo číslo x_2 je riešením rovnice (1) práve vtedy, keď platí $x_2 \in I_3$, čiže $x_2 > u$.

Na intervale I_2 riešime kvadratickú rovnicu

$$x^2 - (u + v)x + 1 = 0.$$

Táto rovnica má diskriminant $D = (u + v)^2 - 4$ a prípadné reálne korene

$$x_3 = \frac{u + v - \sqrt{(u + v)^2 - 4}}{2},$$
$$x_4 = \frac{u + v + \sqrt{(u + v)^2 - 4}}{2}.$$

Zo zadania vyplýva, že aspoň jeden z koreňov x_3, x_4 musí byť riešením rovnice (1) (ležiacim v intervale I_2). Preto hlavne musí byť diskriminant D nezáporný, z čoho vyplýva podmienka $|u + v| \geqq 2$. Pretože naviac $\sqrt{(u + v)^2 - 4} < |u + v|$, majú oba korene x_3, x_4 rovnaké znamienko ako súčet $u + v$. Spolu to znamená, že musí platiť $u + v \geqq 2$ (v prípade $u + v \leqq -2$ by totiž žiadne z čísel x_3, x_4 neležalo v I_2). Za podmienky $u + v \geqq 2$ ale platí $0 < x_3 \leqq x_4$, takže zo zadania vyplýva, že v intervale $I_2 = \langle 0, u\rangle$ leží číslo x_3 (a prípadne aj číslo x_4).

Z doterajších úvah vyplýva, že našou úlohou je odpovedať na otázku, kedy za podmienok

$$u > 0 \quad \text{a} \quad u + v \geqq 2 \tag{2}$$

nastane niektorý z týchto prípadov:

a) $x_2 \notin I_3$, $\{x_3, x_4\} \subset I_2$, $x_3 \neq x_4$;

b) $x_2 \in I_3$, $x_3 = x_4 \in I_2$;

c) $x_2 \in I_3$, $x_3 \in I_2$, $x_4 \notin I_2$.

a) Zistíme, kedy sú splnené jednotlivé podmienky, ktoré tento prípad vymedzujú (pre lepší prehľad ich v texte uvádzame čiernymi bodmi).

• $x_2 \notin I_3$, čiže $x_2 \leqq u$. Po úprave získame nerovnosť

$$\sqrt{(u-v)^2 + 4} \leqq u + v,$$

ktorej pravá strana je podľa (2) kladná, takže obe strany môžeme umocniť na druhú. Po ďalšej jednoduchej úprave dostaneme podmienku $uv \geqq 1$. Preto platí

$$x_2 \notin I_3 \quad \Longleftrightarrow \quad uv \geqq 1.$$

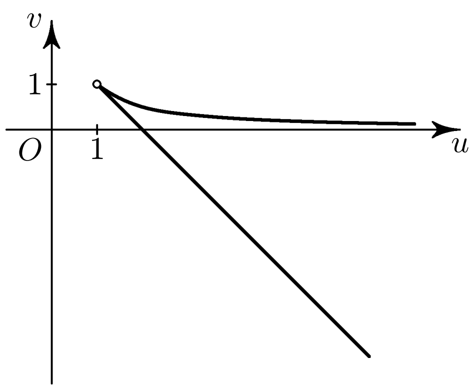
• $\{x_3, x_4\} \subset I_2$. Ako vieme, za podmienok (2) platí $0 < x_3 \leqq x_4$, stačí preto iba skúmať nerovnosť $x_4 \leqq u$, čiže $\sqrt{(u+v)^2 - 4} \leqq u - v$. Posledná nerovnosť môže platiť jedine vtedy, keď $u \geqq v$. Potom po umocnení strán skúmanej nerovnosti a následnej úprave dostaneme podmienku $uv \leqq 1$. Preto platí

$$\{x_3, x_4\} \subset I_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u \geqq v \ \wedge \ uv \leqq 1.$$

• $x_3 \neq x_4$. Zo skoršieho odvodenia podmienky $u + v \geqq 2$ je jasné, že rovnosť $x_3 =$ $= x_4$ nastane práve vtedy, keď $u + v = 2$. Za podmienok (2) teda platí

$$x_3 \neq x_4 \quad \Longleftrightarrow \quad u + v > 2.$$

Zhrnieme teraz všetky podmienky pre skúmaný prípad a). Z nerovností $uv \geqq 1$ a $uv \leqq 1$ vyplýva $uv = 1$, čiže $v = 1/u$. Zostávajúce podmienky majú potom tvar $u \geqq 1/u$ a $u + 1/u > 2$ a sú zrejme obe splnené práve vtedy, keď $u > 1$. Hľadané body $[u, v]$ v prípade a) teda tvoria časť hyperboly $v = 1/u$ určenú obmedzením $u > 1$ (obr. 5).



Obr. 5

b) Z predchádzajúceho rozboru prípadu a) vyplýva, že za podmienok (2) platia ekvivalencie

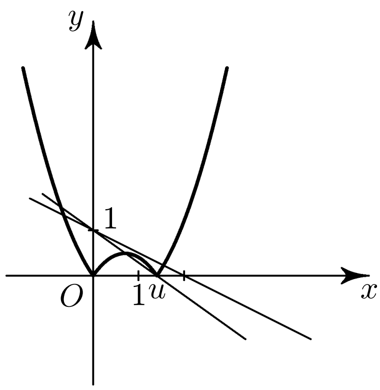
$$x_2 \in I_3 \iff uv < 1, \quad x_4 \in I_2 \iff u \geqq v \ \wedge \ uv \leqq 1,$$
$$x_3 = x_4 \iff u + v = 2.$$

Vidíme, že v prípade b) musí platiť $v = 2 - u$. Vtedy majú zostávajúce podmienky tvar $(2 - u)u < 1$ a $u \geqq 2 - u$ a sú zrejme obe splnené práve vtedy, keď $u > 1$. Hľadané body $[u, v]$ v prípade b) teda tvoria polpriamku určenú rovnicou $v = 2 - u$ a obmedzením $u > 1$.

c) Podmienka $x_3 \in I_2$ sa dá vyjadriť nerovnosťou $x_3 \leqq u$, ktorá je ekvivalentná s nerovnosťou $\sqrt{(u+v)^2 - 4} \geqq v - u$. Tá je splnená triviálne, pokiaľ $u \geqq v$. Ako sme ale ukázali skôr, v prípade $u \geqq v$ platí nielen $x_3 \in I_2$, ale aj $x_4 \in I_2$, čo prípad c) vylučuje. V prípade c) teda nutne platí $u < v$ a z nerovnosti $\sqrt{(u+v)^2 - 4} \geqq v - u$ po umocnení a úprave dostaneme podmienku $uv \geqq 1$. Ako ale vieme, z poslednej nerovnosti vyplýva $x_2 \notin I_3$, takže prípad c) nemôže nikdy nastať.

Záver. Množinou všetkých bodov vyhovujúcich zadaniu je časť hyperboly $v = 1/u$ a časť priamky $v = 2 - u$, v oboch prípadoch časti určené podmienkou $u > 1$.

Iné riešenie. Rovnicu možno riešiť tiež graficky. Skúmame, kedy budú mať grafy funkcií $f(x) = |x^2 - ux|$ a $g(x) = 1 - vx$ práve tri spoločné body (obr. 6). Graf funkcie f



Obr. 6

je zložený z časti paraboly, grafom funkcie g je priamka prechádzajúca bodom $[0, 1]$. Aby táto priamka mala s grafom $f(x)$ spoločné práve tri body, musí byť buď dotyčnicou paraboly na intervale $(0, u)$ (potom $u+v = 2$, odvodenie je analogické ako v predchádzajúcom riešení – pomocou diskriminantu), alebo musí prechádzať bodom $[u, 0]$ a súčasne pretínať graf funkcie f vo vnútornom bode intervalu $(0, u)$. Keď dosadíme súradnice bodu $[u, 0]$ do rovnice priamky g, dostaneme $0 = 1 - vu$, t. j. $uv = 1$. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení musí platiť $u > 1$, čo môžeme overiť nájdením druhého priesečníku priamky s parabolou.