2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie B*

---

1. *Nájdite najväčšie päťmiestne prirodzené číslo, ktoré je deliteľné číslom* 101 *a ktoré sa číta odpredu rovnako ako odzadu.* (J. Šimša)

Riešenie. Ľubovoľné z uvažovaných päťmiestnych čísel má v desiatkovej sústave zápis tvaru $\overline{abcba}$. Jeho rozvinutím a úpravou získame rovnosť

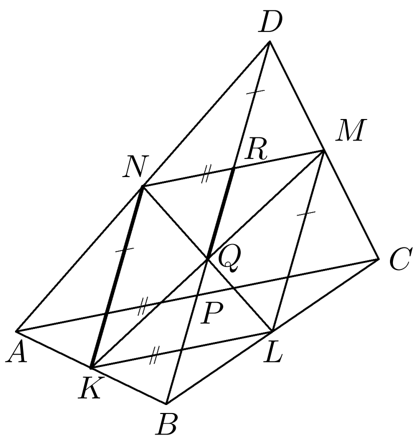
$$\overline{abcba} = 10\,001a + 1\,010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

Odtiaľ vyplýva, že skúmané číslo je deliteľné 101 práve vtedy, keď $2a - c = 0$ (pre ľubovoľné číslice a, c totiž iste platí $|2a - c| < 101$). Z rovnosti $2a = c$ vyplýva $a \leqq 4$, a pretože hľadáme čo najväčšie také číslo, zvolíme jeho prvú číslicu $a = 4$, ktorej odpovedá číslica $c = 8$. Pretože číslica b nemá na deliteľnosť číslom 101 vplyv, zvolíme ju čo najväčšiu: $b = 9$. Hľadané číslo je teda 49 894.

---

2. *Je daný konvexný štvoruholník $ABCD$. Označme P priesečník jeho uhlopriečok a Q priesečník spojníc stredov jeho protiľahlých strán. Ak bod Q leží na uhlopriečke BD, je bod P stredom uhlopriečky AC. Dokážte.* (E. Kováč)

Riešenie. Stredy strán štvoruholníka $ABCD$ označme K, L, M, N podľa obr. 1. Pretože úsečky KL a MN sú postupne stredné priečky trojuholníkov ABC a ACD,



Obr. 1

platí $KL \parallel AC \parallel MN$. Obdobne platí $LM \parallel BD \parallel KN$, takže $KLMN$ je rovnobežník a bod Q rozpoľuje úsečku KM. Všimnime si teraz trojuholník KMN. Stredom Q jeho strany KM prechádza podľa predpokladu úlohy uhlopriečka BD, ktorá je, ako vieme, rovnobežná s druhou stranou KN. Preto aj stred R tretej strany MN leží na uhlopriečke BD. Pretože úsečka MN je rovnoľahlá s úsečkou CA podľa stredu D, rozpoľuje uhlopriečka BD nielen úsečku MN (v bode R), ale aj úsečku AC (v zodpovedajúcom bode P).

3. *Koľko rôznych výsledkov môžeme dostať, ak sčítame každé dve z daných piatich rôznych prirodzených čísel? Pre každý možný počet uveďte príklad takej pätice čísel.* (*P. Černek*)

Riešenie. Dané prirodzené čísla označme podľa veľkosti $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Pretože platí

$$x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < x_2 + x_5 < x_3 + x_5 < x_4 + x_5,$$

je medzi všetkými súčtami $x_i + x_j$ aspoň sedem rôznych hodnôt. Nevypísané zostali iba tri z možných súčtov, a to súčty $x_2 + x_3$, $x_2 + x_4$ a $x_3 + x_4$. Preto pre počet p možných hodnôt uvažovaných súčtov platí $7 \leqq p \leqq 10$. Pre každú z hodnôt $p \in \{7, 8, 9, 10\}$ uvedieme príklad päťprvkovej množiny M_p prirodzených čísel, pre ktorú uvažované súčty nadobúdajú práve p rôznych hodnôt (ich množinu označíme S_p):

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}_7 &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, & \mathsf{S}_7 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\};\\
\mathsf{M}_8 &= \{1, 2, 3, 4, 6\}, & \mathsf{S}_8 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\};\\
\mathsf{M}_9 &= \{1, 2, 3, 4, 7\}, & \mathsf{S}_9 &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\};\\
\mathsf{M}_{10} &= \{1, 2, 3, 5, 8\}, & \mathsf{S}_{10} &= \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}.
\end{aligned}$$