2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Ak od ľubovoľného aspoň dvojmiestneho prirodzeného čísla odtrhneme číslicu na mieste jednotiek, dostaneme číslo o jednu číslicu „kratšie“. Nájdite všetky pôvodné čísla, ktoré sa rovnajú absolútnej hodnote rozdielu druhej mocniny „kratšieho“ čísla a druhej mocniny odtrhnutej číslice.* (J. Zhouf)

Riešenie. Označme hľadané číslo $10a+b$, kde a, b sú celé čísla, $a \geqq 1$, $0 \leqq b \leqq 9$. Podľa zadania má platiť

$$10a + b = |a^2 - b^2|.$$

Predpokladajme najprv, že $a \geqq b$. V tom prípade jednoduchými úpravami dostávame

$$\begin{aligned} 10a + b &= a^2 - b^2, \\ a^2 - 10a + 25 &= b^2 + b + 25, \\ (a-5)^2 &= b^2 + b + 25. \end{aligned}$$

Do poslednej rovnosti potom postupne dosadzujeme $b = 0$, $b = 1, \ldots, b = 9$ a zisťujeme, či výraz $b^2 + b + 25$ je druhou mocninou nejakého nezáporného celého čísla. Rovnici vyhovujú dvojice $b = 0$, $a = 0$; $b = 0$, $a = 10$; $b = 7$, $a = 14$.

V prípade, keď $a < b$, obdobnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 10a + b &= b^2 - a^2, \\ a^2 + 10a + 25 &= b^2 - b + 25, \\ (a+5)^2 &= b^2 - b + 25 \end{aligned}$$

a podobne ako v prvom prípade získame dvojice $b = 0$, $a = 0$; $b = 1$, $a = 0$; $b = 8$, $a = 4$.

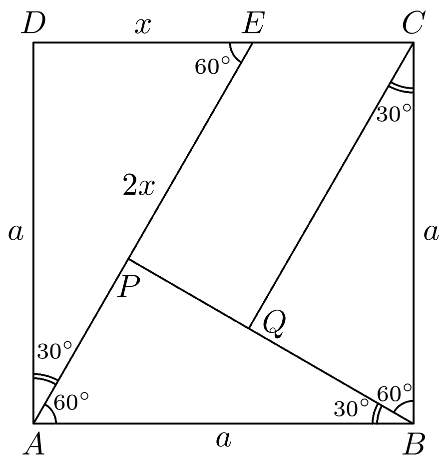
Záver. S prihliadnutím k podmienkam zadania sú riešením úlohy tri čísla 48, 100, 147.

---

2. *Na strane CD štvorca $ABCD$ je zvolený bod E tak, že uhol DAE má veľkosť $30°$. Bod P je pätou kolmice vedenej bodom B na priamku AE, bod Q pätou kolmice vedenej bodom C na priamku BP. Rozhodnite, či je obsah lichobežníka $PQCE$ menší ako tretina obsahu štvorca $ABCD$.* (L. Boček)

Riešenie. Označme a dĺžku strany štvorca $ABCD$. Trojuholníky AED, BAP a CBQ sú podobné podľa vety *uu*, pričom trojuholníky BAP a CBQ sú dokonca zhodné (obr. 1). Trojuholník AED je polovicou rovnostranného trojuholníka so stranou AE.

Ak označíme $|ED| = x$, tak $|AE| = 2x$.



Obr. 1

V pravouhlom trojuholníku AED platí

$$a = |AD| = \sqrt{|AE|^2 - |ED|^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3},$$

odkiaľ $x = \left(\sqrt{3}/3\right) a$. (Veľkosť x môžeme tiež spočítať použitím goniometrického vzorca $x : a = |ED| : |AD| = \operatorname{tg} 30° = \sqrt{3}/3$.)

Trojuholníky BAP a CBQ sú polovicami rovnostranného trojuholníka so stranou a. Rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky a má výšku $\left(\sqrt{3}/2\right) a$ a jeho obsah je $\left(\sqrt{3}/4\right) a^2$. Súčet obsahov trojuholníkov AED, BAP a CBQ je teda

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{12} a^2.$$

Keďže obsah štvorca $ABCD$ je a^2, je pomer obsahov lichobežníka $PQCE$ a štvorca $ABCD$ rovný

$$\frac{a^2 - \frac{5}{12}\sqrt{3}a^2}{a^2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{12},$$

čo je číslo menšie ako 0,29.

Záver. Obsah lichobežníka $PQCE$ je menší ako tretina obsahu štvorca $ABCD$.

Pre zaujímavosť uvedieme ešte jedno riešenie, v ktorom ukážeme, že skúmaný obsah sa dá odhadnúť pomocou úvah o vzájomnej polohe vhodných bodov (bez výpočtu dĺžok a obsahu).

Iné riešenie. Pretože nás zaujímajú len pomery obsahov, môžeme predpokladať, že $ABCD$ je štvorec so stranou 1. V stredovej súmernosti podľa stredu štvorca O prejdú body E, P a Q do bodov, ktoré označíme G, R a S (obr. 2). Z pravouhlého trojuholníka AED s uhlom 60° pri vrchole E vyplýva

$$|DE| = \frac{1}{2}|AE| > \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2},$$

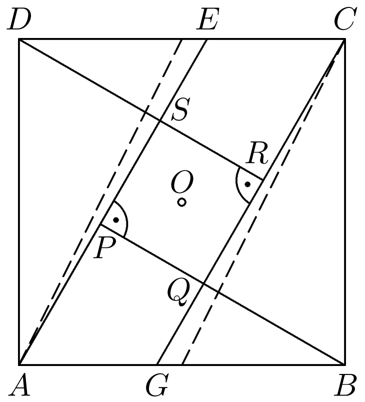
takže pre obsah rovnobežníka $AGCE$ platí nerovnosť

$$S_{AGCE} < \frac{1}{2}.$$

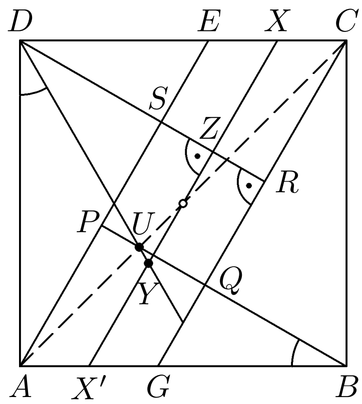
Zároveň sa zdá, že zhodné lichobežníky $RCES$ a $AGQP$ majú väčší obsah ako štvorec $PQRS$. Ak to tak naozaj je, musí byť $S_{RCES} > S_{AGCE}/3$, takže nutne platí

$$S_{PQCE} = S_{AGCE} - S_{AGQP} = S_{AGCE} - S_{RCES} <$$
$$< \frac{2}{3} S_{AGCE} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Tým bude úloha vyriešená.



Obr. 2



Obr. 3

Strana SR štvorca $PQRS$ je súčasne výškou lichobežníka $RCES$. Preto bude nerovnosť $S_{PQRS} < S_{RCES}$ dokázaná, keď overíme, že strana štvorca je kratšia ako stredná priečka lichobežníka. Tou je úsečka XZ, kde Z označuje stred úsečky SR, čo je zároveň päta výšky rovnostranného trojuholníka XYD (obr. 3). Označme U priesečník uhlopriečky AC daného štvorca s úsečkou PQ. Týmto bodom prechádza aj priamka DY, ktorá je súmerne združená s priamkou BP práve podľa osi AC, pretože $|\measuredangle YDA| = |\measuredangle ABP| = 30°$. To však znamená, že bod Y, ktorý je priesečníkom DU a XZ, leží mimo štvorca $PQRS$! Preto naozaj $|XZ| = |ZY| > |QR|$. Obsah lichobežníka $PQCE$ je teda menší ako tretina obsahu štvorca $ABCD$.

---

3. *Z piatich jednotiek, piatich dvojok, piatich trojok, piatich štvoriek a piatich pätiek zostavíme päť päťmiestnych čísel, ktoré sa čítajú odpredu rovnako ako odzadu (napr.* 32 223*), a potom tieto čísla sčítame. Akú najmenšiu a akú najväčšiu hodnotu môže mať výsledný súčet?* (J. Šimša)

Riešenie. Označme a zapíšme v desiatkovej sústave päť päťmiestnych čísel, ktoré sa čítajú spredu rovnako ako zozadu a sú zostavené z daných číslic:

$$\overline{a_1b_1c_1b_1a_1} = a_1 \cdot 10^4 + b_1 \cdot 10^3 + c_1 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + a_1,$$
$$\overline{a_2b_2c_2b_2a_2} = a_2 \cdot 10^4 + b_2 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + b_2 \cdot 10 + a_2,$$
$$\overline{a_3b_3c_3b_3a_3} = a_3 \cdot 10^4 + b_3 \cdot 10^3 + c_3 \cdot 10^2 + b_3 \cdot 10 + a_3,$$
$$\overline{a_4b_4c_4b_4a_4} = a_4 \cdot 10^4 + b_4 \cdot 10^3 + c_4 \cdot 10^2 + b_4 \cdot 10 + a_4,$$
$$\overline{a_5b_5c_5b_5a_5} = a_5 \cdot 10^4 + b_5 \cdot 10^3 + c_5 \cdot 10^2 + b_5 \cdot 10 + a_5.$$

Medzi číslicami c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 je práve jedna jednotka, práve jedna dvojka, práve jedna trojka, práve jedna štvorka a práve jedna päťka. Keby totiž na mieste stoviek uvažovaných piatich čísel chýbala napr. jednotka, musela by sa na miestach ostatných rádov vyskytovať v nepárnom počte (päťkrát), čo vzhľadom na symetriu uvažovaných čísel nie je možné. Pre súčet S uvažovaných čísel teda platí

$$\begin{aligned} S &= \overline{a_1b_1c_1b_1a_1} + \overline{a_2b_2c_2b_2a_2} + \overline{a_3b_3c_3b_3a_3} + \overline{a_4b_4c_4b_4a_4} + \overline{a_5b_5c_5b_5a_5} = \\ &= (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)\cdot(10^4+1) + \\ &\quad + (b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)\cdot(10^3+10) + \\ &\quad + (c_1+c_2+c_3+c_4+c_5)\cdot 10^2 = \\ &= 10\,001\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) + 1\,010\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) + \\ &\quad + 100\cdot(1+2+3+4+5) = \\ &= 10\,001\cdot(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5) + \\ &\quad + 1\,010\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) + 1\,500. \end{aligned}$$

S ohľadom na číslice, ktoré máme k dispozícii, bude súčet S najmenší, keď bude

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 &= 1+1+2+2+3 = 9, \\ b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 &= 5+5+4+4+3 = 21. \end{aligned}$$

Najmenší možný súčet má teda hodnotu

$$S_{\min} = 10\,001\cdot 9 + 1\,010\cdot 21 + 1\,500 = 112\,719$$

a vznikne napr. ako súčet

$$S_{\min} = 13\,131 + 14\,241 + 24\,342 + 25\,452 + 35\,553.$$

Podobne bude súčet S najväčší, keď bude

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 &= 5+5+4+4+3 = 21, \\ b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 &= 1+1+2+2+3 = 9. \end{aligned}$$

Najväčší možný súčet má teda hodnotu

$$S_{\max} = 10\,001\cdot 21 + 1\,010\cdot 9 + 1\,500 = 220\,611$$

a vznikne napr. ako súčet

$$S_{\max} = 53\,535 + 52\,425 + 42\,324 + 41\,214 + 31\,113.$$