2002/2003
52. ročník MO *Riešenia úloh krajského kola kategórie C*

1. *Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré je súčin*

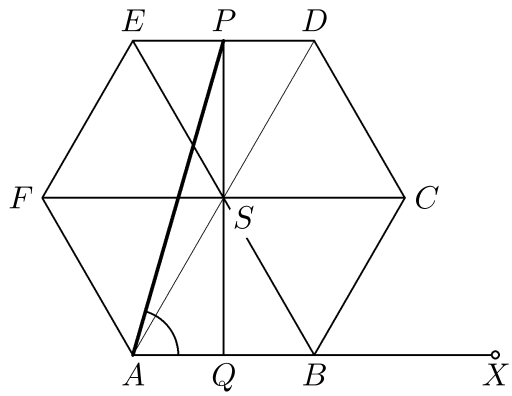
$$2\,003 \cdot 2\,004 \cdot 2\,005 \cdot \ldots \cdot (2\,003 + n)$$

deliteľný všetkými dvojmiestnymi prvočíslami. (J. Šimša)

Riešenie. Pre každé z dvojmiestnych prvočísiel 97, 89, 83, 79, 73, … hľadáme jeho najmenší násobok, ktorý prevyšuje číslo 2 003. Vzhľadom na to, že medzi k po sebe idúcimi celými číslami je práve jedno deliteľné k, a pretože $97 \cdot 21 = 2\,037$, $89 \cdot 23 = 2\,047$, $83 \cdot 25 = 2\,075$, $79 \cdot 26 = 2\,054$, musí byť $2\,003 + n \geqq 2\,075$, teda $n \geqq 72$. Pre také n máme zaručené, že pre každé z prvočísiel 97, 89, 83, 79 je medzi číslami 2 003, 2 004, 2 005, …, $2\,003 + n$ aspoň jedno ním deliteľné. Medzi uvedenými 73 číslami 2 003 až 2 075 je vždy aspoň jedno deliteľné prvočíslom 73, aspoň jedno deliteľné prvočíslom 71 atď. Hľadané číslo n je teda 72.

2. *V rovine je daná úsečka AP. Zostrojte pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ tak, aby bod P bol stredom jeho strany DE.* (J. Švrček)

Riešenie. V pravidelnom šesťuholníku $ABCDEF$ so stredom S, v ktorom Q je stred strany AB a P je stred strany DE, poznáme veľkosť uhla PAQ (obr. 1), pretože všetky



Obr. 1

pravidelné šesťuholníky sú navzájom podobné. V pravouhlom trojuholníku APQ teda poznáme dĺžku prepony AP a veľkosti dvoch uhlov (AQP je pravý uhol). Odtiaľ vyplýva postup *konštrukcie*:

1. úsečka AP;
2. Tálesova kružnica k nad priemerom AP;
3. polpriamka AX, ktorá zviera s úsečkou AP uhol veľkosti PAQ (ten zostrojíme pomocou ľubovoľného pravidelného šesťuholníka);
4. bod Q ako priesečník kružnice k s polpriamkou AX;
5. stred S úsečky PQ;
6. kružnica so stredom S a polomerom $|SQ|$;
7. pravidelný šesťuholník $ABCDEF$.

Úloha má dve riešenia súmerne združené podľa osi AP podľa toho, v ktorej polrovine s hraničnou priamkou AP zostrojíme polpriamku AX (bod 3 konštrukcie).

---

3. *Keby Karol požičal jednému známemu p tisíc Sk s úrokom p % a druhému známemu q tisíc Sk s úrokom q %, kde p a q sú celé čísla, priniesli by mu obe pôžičky taký istý zisk, ako keby jednej osobe požičal celkovú čiastku s úrokom $(p+2{,}4)$ %. Keby požičal jednému známemu p tisíc Sk s úrokom $2p$ % a druhému známemu q tisíc Sk s úrokom $2q$ %, priniesli by mu tieto pôžičky rovnaký zisk, ako keby jednej osobe požičal celkovú čiastku s úrokom $(p+5{,}8)$ %. Určte čísla p a q.* (J. Šimša, J. Zhouf)

Riešenie. V prvom prípade platí

$$1\,000p \cdot \frac{p}{100} + 1\,000q \cdot \frac{q}{100} = 1\,000(p+q) \cdot \frac{p+2{,}4}{100},$$

v druhom prípade platí

$$1\,000p \cdot \frac{2p}{100} + 1\,000q \cdot \frac{2q}{100} = 1\,000(p+q) \cdot \frac{p+5{,}8}{100}.$$

Úpravou oboch rovníc získame sústavu

$$\begin{aligned} p^2+q^2 &= (p+2{,}4)(p+q), \\ 2p^2+2q^2 &= (p+5{,}8)(p+q). \end{aligned} \tag{1}$$

Pretože ľavá strana druhej rovnice je dvojnásobkom ľavej strany prvej rovnice, musí platiť

$$2(p+2{,}4)(p+q) = (p+5{,}8)(p+q).$$

Odtiaľ po vykrátení nenulovým výrazom $p+q$ vychádza $p=1$. Dosadením tejto hodnoty napr. do rovnice (1) a po úprave získame kvadratickú rovnicu

$$q^2 - 3{,}4q - 2{,}4 = 0.$$

Pretože hľadáme celočíselné korene, prepíšeme rovnicu do tvaru

$$q(5q-17) = 12$$

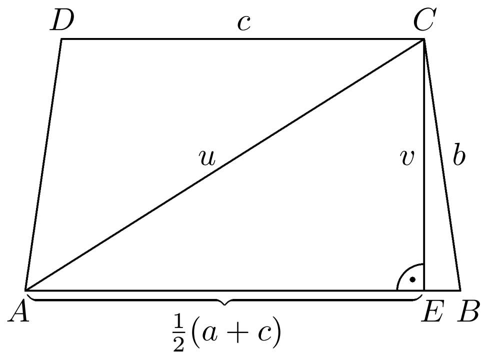
a ľahko zistíme, že medzi deliteľmi čísla 12 rovnici vyhovuje jedine $q=4$.

---

4. *Určte dĺžku ramien rovnoramenného lichobežníka so základňami dĺžok* 10 *a* 12 *tak, aby dĺžky všetkých jeho strán aj uhlopriečok boli vyjadrené celými číslami.* (P. Černek)

Riešenie. Označme E pätu kolmice spustenej z vrcholu C na základňu AB rovnoramenného lichobežníka $ABCD$ a jednotlivé dĺžky úsečiek označme takto (obr. 2): $|AB| = a = 12$, $|BC| = b$, $|CD| = c = 10$, $|AC| = u$, $|CE| = v$. Potom $|BE| = (a-c)/2 = 1$,

$|AE| = (a+c)/2 = 11$. Podľa Pytagorovej vety pre trojuholníky AEC a EBC môžeme



Obr. 2

teda písať

$$v^2 = u^2 - 11^2 = b^2 - 1^2, \tag{1}$$

alebo

$$u^2 - b^2 = 11^2 - 1^2 = 120.$$

Odtiaľ je vidieť, že čísla u a b sú zároveň obe párne, alebo obe nepárne, preto v rozklade

$$(u-b)(u+b) = 120 = 2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12$$

prichádzajú do úvahy len uvedené rozklady čísla 120 na párne činitele. Uvedeným rozkladom potom zodpovedajú štyri sústavy rovníc pre neznáme u a b:

$$\begin{array}{llll} u-b=2, & u-b=4, & u-b=6, & u-b=10, \\ u+b=60; & u+b=30; & u+b=20; & u+b=12. \end{array}$$

Ich riešením (najlepšie tak, že vždy odčítame druhú rovnicu od prvej) dostaneme pre dĺžku ramena b lichobežníka $ABCD$ štyri možnosti, $b \in \{29, 13, 7, 1\}$. Z rovnosti (1) však vidíme, že musí byť $b > 1$, úlohe teda vyhovujú len prvé tri hodnoty.

Odpoveď. Možná dĺžka ramena lichobežníka je buď 7, alebo 13, alebo 29.