67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z7*

1. *Peter povedal Pavlovi: „Napíš dvojciferné prirodzené číslo, ktoré má tú vlastnosť, že keď od neho odčítaš dvojciferné prirodzené číslo s tými istými ciframi napísanými v opačnom poradí, dostaneš rozdiel 63.“ Ktoré číslo mohol Pavol napísať? Určte všetky možnosti.* (Libuše Hozová)

Nápad. Aký je rozdiel cifier Pavlovho čísla?

Riešenie. Úlohu môžeme riešiť ako algebrogram:

$$\begin{array}{r} a\ b \\ -\ b\ a \\ \hline 6\ 3 \end{array}$$

Keďže rozdiel je kladný, musí byť $a > b$. Keďže navyše v rozdiele na mieste jednotiek je 3, musí sa počítať s prechodom cez desiatku. Keďže v rozdiele na mieste desiatok je 6, musí byť $a - b = 7$. Keďže ďalej obe čísla sú dvojciferné, musí byť $b > 0$. Celkom tak dostávame dve možnosti:

$$\begin{array}{r} 8\ 1 \\ -\ 1\ 8 \\ \hline 6\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\ 2 \\ -\ 2\ 9 \\ \hline 6\ 3 \end{array}$$

Číslo, ktoré mohol Pavol napísať, bolo 81 alebo 92.

Poznámka. Dvojciferné číslo zapísané $\overline{ab}$ možno vyjadriť ako $10a + b$. Predchádzajúci zápis je preto ekvivalentný s rovnosťou

$$(10a + b) - (10b + a) = 63,$$

čo po úprave vedie na $a - b = 7$.

---

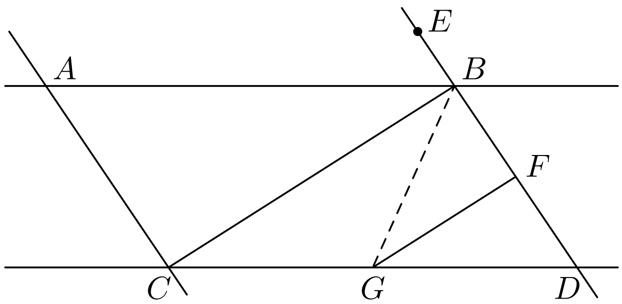
2. *Dané sú dve dvojice rovnobežných priamok $AB \parallel CD$ a $AC \parallel BD$. Bod E leží na priamke BD, bod F je stredom úsečky BD, bod G je stredom úsečky CD a obsah trojuholníka ACE je $20\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah trojuholníka DFG.* (Vladimíra Semeráková)

Nápad. Porovnajte obsahy trojuholníkov ACE a ABC.

Riešenie. Obsah trojuholníka závisí od dĺžky jeho strany a veľkosti výšky na túto stranu. Keďže priamky AC a BD sú rovnobežné a bod E leží na priamke BD, obsah trojuholníka ACE je stále rovnaký pre akokoľvek zvolený bod E. Preto obsah trojuholníka ACE je rovnaký ako obsah trojuholníka ACD. Z rovnakého dôvodu je aj obsah trojuholníka ACD rovnaký ako obsah trojuholníka BCD. Spolu teda

$$S_{ACE} = S_{ACD} = S_{BCD} = 20\,\mathrm{cm}^2.$$

Teraz porovnáme obsahy trojuholníkov BCD a DFG:



Trojuholníky DFG a FBG majú spoločnú výšku z vrcholu G a bod F je v strede strany BD, preto majú tieto trojuholníky rovnaký obsah. Trojuholníky DFG a FBG dokopy tvoria trojuholník DBG, a preto platí $S_{DFG} = \frac{1}{2}S_{DBG}$. Z obdobného dôvodu tiež platí $S_{DBG} = \frac{1}{2}S_{DBC}$. Spolu teda platí

$$S_{DFG} = \frac{1}{4}S_{DBC} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5\,(\mathrm{cm}^2).$$

Poznámka. Predchádzajúce vyjadrenie pomeru obsahov trojuholníkov DFG a DBC skryto odkazuje na ich podobnosť, čo možno v zdôvodnení tiež použiť (FG je strednou priečkou trojuholníka DBC, preto sú všetky zodpovedajúce si strany úmerné v pomere $1:2$). Bez odkazu na pojem podobnosti je možné priamo porovnať napr. základne DF a DB a zodpovedajúce výšky (oboje v pomere $1:2$). Takto možno uvažovať aj pre trojuholníky DFG a ACE s ľubovoľným $E \in BD$ (t. j. bez vyššie použitých transformácií).

---

3. *Zoologická záhrada ponúkala školským skupinám výhodné vstupné: každý piaty žiak dostáva vstupenku zdarma. Pán učiteľ 6.A spočítal, že ak kúpi vstupné deťom zo svojej triedy, ušetrí za štyri vstupenky a zaplatí 19,95 €. Pani učiteľka 6.B mu navrhla, nech kúpi vstupenky deťom oboch tried naraz, a tak budú platiť 44,10 €. Koľko detí z 6.A a koľko detí z 6.B išlo do zoo? (Cena vstupenky v centoch je celočíselná.)*

(*Libor Šimůnek*)

Nápad. Koľko vstupeniek treba žiadať, aby boli práve štyri z nich zdarma?

Riešenie. Ak by sa pri kúpe vstupeniek pre deti zo 6.A vďaka uvedenej výhode ušetrilo za 4 vstupenky, muselo ísť do zoo aspoň $4 \cdot 5 = 20$, avšak menej ako $5 \cdot 5 = 25$ detí z tejto triedy. Pri počte detí od 20 do 24 by sa muselo zaplatiť vždy o 4 vstupenky menej, teda 16 až 20. Zaplatená čiastka (v centoch) je deliteľná 19, nie však 16, 17, 18 či 20 (vidno to z prvočíselného rozkladu $1\,995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$). Pre deti z 6.A by teda bolo treba zaplatiť 19 vstupeniek a každá by tak stála $19{,}95 : 19 = 1{,}05$ €. Počet detí z 6.A bol o 4 väčší, teda $19 + 4 = 23$.

Pri spoločnej kúpe vstupného pre deti z oboch tried by sa uhradilo 44,10 €, teda zaplatených vstupeniek by bolo $44{,}10 : 1{,}05 = 42$. V rámci výhody bola každá štvorica zaplatených vstupeniek doplnená o jednu vstupenku zdarma, teda pri zaplatení 42 vstupeniek $(10 \cdot 4 + 2)$ by ich dostali 52 $(10 \cdot 5 + 2)$. Počet detí z 6.B bol $52 - 23 = 29$.

Do zoo išlo 23 detí z 6.A a 29 detí z 6.B.

4. *Na stole ležalo šesť kartičiek s ciframi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Anežka z týchto kartičiek zložila šesťciferné číslo, ktoré bolo deliteľné šiestimi. Potom postupne odoberala kartičky sprava. Keď odobrala prvú kartičku, zostalo na stole päťciferné číslo deliteľné piatimi. Keď odobrala ďalšiu kartičku, zostalo štvorciferné číslo deliteľné štyrmi. Keď odoberala ďalej, získala postupne trojciferné číslo deliteľné tromi a dvojciferné číslo deliteľné dvoma. Ktoré šesťciferné číslo mohla Anežka pôvodne zložiť? Určte všetky možnosti.*
(*Lucie Růžičková*)

Nápad. Čo môžete povedať o jednotlivých cifrách hľadaného čísla?

Riešenie. Hľadané šesťciferné číslo označíme $\overline{abcdef}$. Zo zadania postupne odvodíme niekoľko poznatkov o tomto čísle:

1. Celé šesťciferné číslo je deliteľné šiestimi, teda je deliteľné zároveň dvoma a troma. Deliteľnosť troma je zaručená tým, že ciferný súčet je (až na poradie sčítancov) rovný $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, čo je číslo deliteľné troma. Deliteľnosť dvoma znamená, že f je niektorá z cifier 2, 4, 6.
2. Päťciferné číslo $\overline{abcde}$ je deliteľné piatimi, preto $e = 5$.
3. Štvorciferné číslo $\overline{abcd}$ je deliteľné štyrmi, preto aj číslo $\overline{cd}$ je deliteľné štyrmi. Preto d je niektorá z cifier 2, 4, 6.
4. Trojciferné číslo $\overline{abc}$ je deliteľné troma, preto ciferný súčet $a + b + c$ je deliteľný troma.
5. Dvojciferné číslo $\overline{ab}$ je deliteľné dvoma, preto b je niektorá z cifier 2, 4, 6.

Jednoznačne je určené $e = 5$ a cifry b, d, f sú v niektorom poradí 2, 4, 6. Na cifry a a c teda ostáva 1 a 3. Z tretej podmienky potom vyplýva, že dvojciferné číslo $\overline{cd}$ môže byť niektoré z čísel

$$12, \quad 16, \quad 32, \quad 36.$$

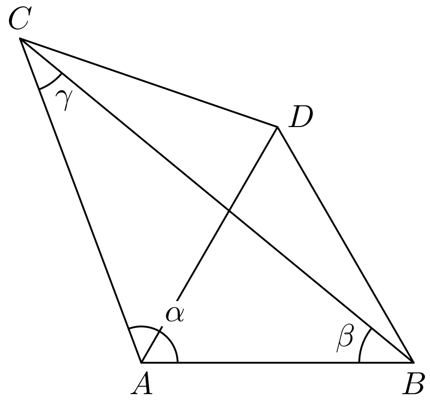
Pre každú z týchto možností je a určené jednoznačne: v prvých dvoch prípadoch je $a = 3$, vo zvyšných dvoch prípadoch je $a = 1$, súčet $a + c$ je však vždy rovný 4. Aby bola splnená aj štvrtá podmienka, musí byť $b = 2$. Ostávajú teda iba dve možnosti: Anežka mohla zložiť 321654 alebo 123654.

---

5. *Prokop zostrojil trojuholník ABC, ktorého vnútorný uhol pri vrchole A bol väčší ako $60°$ a vnútorný uhol pri vrchole B bol menší ako $60°$. Juraj narysoval v polrovine určenej priamkou AB a bodom C bod D, a to tak, že trojuholník ABD bol rovnostranný. Potom chlapci zistili, že trojuholníky ACD a BCD sú rovnoramenné s hlavným vrcholom D. Určte veľkosť uhla ACB.* (*Eva Semerádová*)

Nápad. Nájdite vzťahy medzi vnútornými uhlami uvedených trojuholníkov.

Riešenie. Veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC označíme postupne α, β, γ. V rovnostrannom trojuholníku ABD majú všetky vnútorné uhly veľkosť $60°$.



Zhodné uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka BCD majú veľkosť

$$|\measuredangle BCD| = |\measuredangle CBD| = |\measuredangle ABD| - |\measuredangle ABC| = 60^\circ - \beta.$$

Zhodné uhly pri základni rovnoramenného trojuholníka ACD majú veľkosť

$$|\measuredangle ACD| = |\measuredangle CAD| = |\measuredangle CAB| - |\measuredangle DAB| = \alpha - 60^\circ.$$

Veľkosť neznámeho uhla ACB môžeme vyjadriť ako

$$\gamma = |\measuredangle ACD| - |\measuredangle BCD| = (\alpha - 60^\circ) - (60^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 120^\circ.$$

Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku ABC je 180°, teda

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta - 120^\circ) = 180^\circ,$$

z čoho vyplýva $\alpha + \beta = 150^\circ$. Uhol ACB má veľkosť $\gamma = 150^\circ - 120^\circ = 30^\circ$.

Poznámka. Zadaným podmienkam zodpovedá nekonečne veľa situácií; γ je vždy 30°, zvyšných 150° môže byť medzi α a β rozdelených ľubovoľne.

Všetky body A, B, C ležia na jednej kružnici so stredom v bode D. V takých prípadoch všeobecne platí, že veľkosť uhla ACB je polovicou uhla ADB (pozri vetu o obvodovom a stredovom uhle).

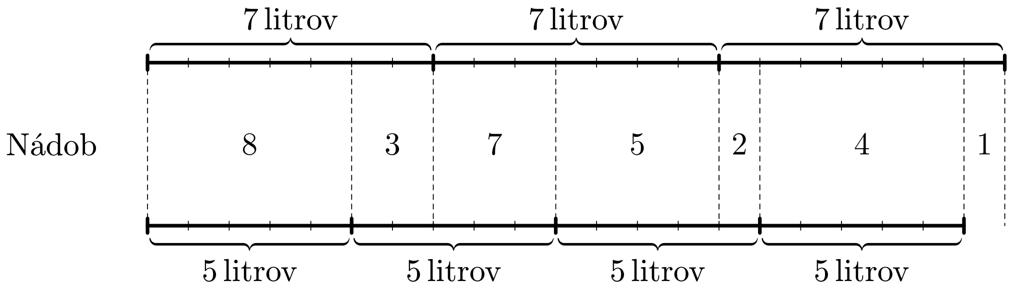
---

6. *Vodník Chaluha nalieval hmlu do rozmanitých, rôzne veľkých nádob, ktoré si starostlivo zoradil na polici. Pri nalievaní postupoval postupne z jednej strany, žiadnu nádobu nepreskakoval. Do každej nádoby sa vojde aspoň deciliter hmly. Keby nalieval hmlu sedemlitrovou odmerkou, hmla z prvej odmerky by naplnila presne 11 nádob, hmla z druhej odmerky by naplnila presne ďalších 12 nádob a hmla z tretej odmerky by naplnila presne 7 nádob. Ak by použil päťlitrovú odmerku, tak hmla z prvej odmerky by naplnila presne 8 nádob, z druhej presne 10 nádob, z tretej presne 7 nádob a zo štvrtej odmerky presne 4 nádoby. Rozhodnite, či je tridsiata nádoba v poradí väčšia ako dvadsiata piata.* (*Karel Pazourek*)

Nápad. Aký objem mala tridsiata nádoba?

Riešenie. S tromi sedemlitrovými odmerkami by vodník rozlial 21 litrov hmly do $11 + 12 + 7 = 30$ nádob. So štyrmi päťlitrovými odmerkami by rozlial 20 litrov hmly do $8 + 10 + 7 + 4 = 29$ nádob. Posledná, tridsiata nádoba teda mala objem 1 liter.

Hmla z prvej sedemlitrovej odmerky by naplnila presne 11 nádob, pritom prvých päť litrov by naplnilo presne 8 nádob (prvá päťlitrová odmerka) a zvyšné dva litre presne 3 nádoby ($11 - 8 = 3$). Táto časť tiež zodpovedá prvým dvom litrom z druhej päťlitrovej odmerky. Tá by však vystačila na 10 nádob, teda zvyšné tri litre by naplnili presne 7 nádob ($10 - 3 = 7$). Podobne môžeme doplniť ďalšie podrobnosti o skupinách nádob a ich objemoch, ktoré schematicky znázorníme takto:



Nádoby 1 až 8 pojmú dokopy presne 5 litrov, nádoby 9 až 11 pojmú dokopy 2 litre, nádoby 12 až 18 pojmú 3 litre, nádoby 19 až 23 pojmú 4 litre, nádoby 24 až 25 pojmú 1 liter, atď.

Posledné dve uvedené nádoby pojmú dokopy to isté čo samotná tridsiata nádoba, preto má tridsiata nádoba väčší objem ako dvadsiatapiata.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Farkas Smitková, Libor Šimůnek, Erika Trojáková, Marta Volfová, Vojtěch Žádník
Recenzenti:	Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Trojáková , Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný, Vojtech Bálint
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017