67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z8*

---

1. *Vyjadrite číslo milión pomocou čísel obsahujúcich iba cifry 9 a algebrických operácií plus, mínus, krát, delené, mocnina a odmocnina. Určte aspoň tri rôzne riešenia.*
(*Lenka Dedková*)

Nápad. Vyjadrite uvedeným spôsobom čo najviac malých prirodzených čísel, ktoré by sa mohli ďalej hodiť.

Riešenie. Prirodzené čísla obsahujúce iba cifry 9 sú 9, 99, 999, 9 999 atď. Náhodné operácie s týmito číslami vychádzajú všelijako, ale môžeme si všimnúť napr. nasledujúce výsledky:

$$\frac{9}{9}=1, \quad \sqrt{9}=3, \quad 9+9=18, \quad 99-9=90 \quad \text{a pod.}$$

V ďalšom kroku vieme vyjadriť číslo 10, a to napr. takto:

$$10=9+\frac{9}{9}=\frac{9\cdot 9+9}{9}=\frac{99-9}{9}.$$

Podobne možno vyjadriť 100, 1 000 atď., teda aj milión:

$$1\,000\,000=999\,999+\frac{9}{9}=\frac{999\,999\cdot 9+9}{9}=\frac{9\,999\,999-999\,999}{9}.$$

Z ďalších nápadov z prvého kroku môžeme vyjadriť napr.

$$2=\frac{9}{9}+\frac{9}{9}=\frac{9+9}{9}, \quad 6=9-\sqrt{9}=\frac{9+9}{\sqrt{9}} \quad \text{a pod.}$$

Z toho možno vyjadriť milión mnohými ďalšími spôsobmi, napr. takto:

$$1\,000\,000=\left(9+\frac{9}{9}\right)^{9-\sqrt{9}}.$$

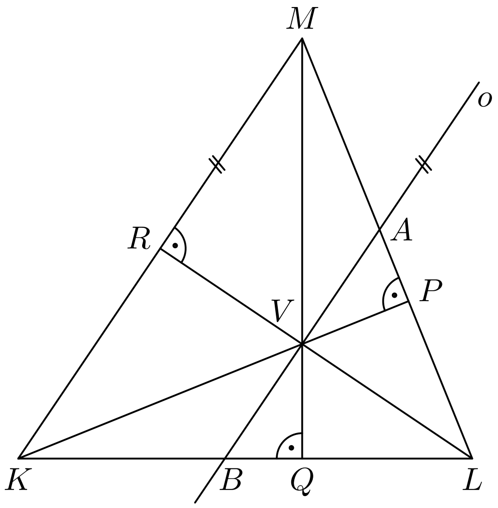
Poznámka. Pomocou $\frac{9}{9}=1$ možno vyjadriť milión aj ako súčet milióna týchto zlomkov. Tento a podobné nápady však nie je možné hodnotiť, ak nie sú realizované vyššie opísaným spôsobom (teda sú bez slov alebo bodiek naznačujúcich pokračovanie istej myšlienky).

---

2. *V ostrouhlom trojuholníku KLM má uhol KLM veľkosť $68°$. Bod V je priesečníkom výšok a P je pätou výšky na stranu LM. Os uhla PVM je rovnobežná so stranou KM. Porovnajte veľkosti uhlov MKL a LMK.* (*Libuše Hozová*)

Nápad. Uvažujte osovú súmernosť podľa výšky na stranu KM.

Riešenie. Na nasledujúcom obrázku sú znázornené údaje zo zadania, navyše päty všetkých výšok (body P, Q, R) a priesečníky osi uhla PVM so stranami trojuholníka (body A, B):



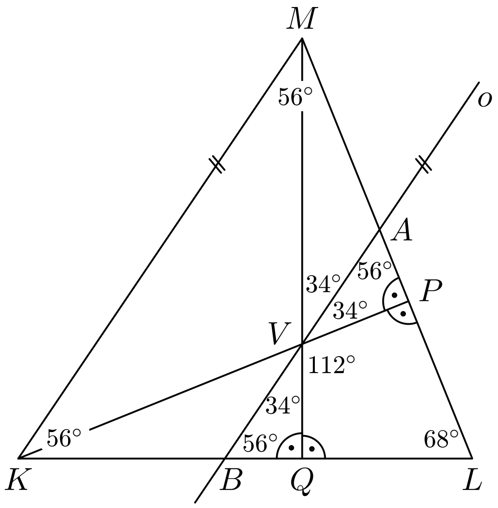
Os uhla PVM je rovnobežná so stranou KM, preto obe tieto priamky sú kolmé na výšku LR. Teda pri osovej súmernosti podľa priamky LR sa ako priamka KM, tak priamka AB zobrazuje sama na seba. Uhly PVM a QVK sú zhodné (vrcholové uhly) a os uhla PVM je tiež osou uhla QVK, preto uhly AVM a BVK sú zhodné. Pri osovej súmernosti podľa priamky LR sa tak priamka PK zobrazuje na priamku QM, teda bod K sa zobrazuje na bod M. Spolu zisťujeme, že trojuholník KLM je súmerný podľa výšky LR. Preto sú uhly MKL a LMK zhodné.

Iný nápad. Porovnajte uhly, ktoré určuje os uhla PVM so stranami KL a LM.

Iné riešenie. Uhly PVM a QVK sú zhodné (vrcholové uhly). Os uhla PVM je tiež osou uhla QVK, preto uhly PVA a QVB sú zhodné. Trojuholníky PVA a QVB sú oba pravouhlé a majú zhodné vnútorné uhly pri vrchole V, preto aj uhly PAV a QBV sú zhodné.

Os AB je rovnobežná so stranou KM, preto sú dvojice uhlov PAV, LMK a QBV, LKM zhodné (súhlasné uhly). Keďže uhly PAV a QBV sú zhodné, aj uhly LMK a LKM sú zhodné.

Poznámka. Podľa zadania možno postupne určiť veľkosti rozličných uhlov a takto nakoniec overiť, že uhly MKL a LMK sú zhodné. Veľkosti vybraných uhlov sú vyznačené na nasledujúcom obrázku:



3. *Adelka mala na papieri napísané dve čísla. Keď k nim pripísala ešte ich najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok, dostala štyri rôzne čísla menšie ako 100. S úžasom zistila, že keď vydelí najväčšie z týchto štyroch čísel najmenším, dostane najväčší spoločný deliteľ všetkých štyroch čísel. Ktoré čísla mala Adelka napísané na papieri?* (Michaela Petrová)

Nápad. Aký je vzťah medzi najmenším spoločným násobkom a najväčším spoločným deliteľom dvoch čísel?

Riešenie. Všetky štyri čísla boli navzájom rôzne, preto pôvodné dve čísla boli rôzne, ich najväčší spoločný deliteľ bol menší ako každé z týchto čísel a najmenší spoločný násobok väčší ako každé z týchto čísel. Ak najväčšieho spoločného deliteľa označíme d, môžeme pôvodné dve čísla zapísať ako $d \cdot x$ a $d \cdot y$, pričom $x < y$ sú nesúdeliteľné čísla väčšie ako 1. Najmenší spoločný násobok je potom rovný $d \cdot x \cdot y$. Spolu teda máme

$$d < d \cdot x < d \cdot y < d \cdot x \cdot y < 100.$$

Vlastnosť, ktorá Adelku uviedla do úžasu, znamená, že podiel $d \cdot x \cdot y$ a d je rovný d, čiže

$$d = x \cdot y.$$

Hľadáme teda nesúdeliteľné čísla $x < y$ väčšie ako 1 také, že $(x \cdot y)^2 < 100$, čiže $x \cdot y < 10$. Taká dvojica čísel je jediná:

- pre $x = 2$ a $y = 3$ je $x \cdot y = 6 < 10$,
- pre $x = 2$ a $y = 5$ je $x \cdot y = 10$,
- pre $x = 3$ a $y = 4$ je $x \cdot y = 12 > 10$,
- atď.

Adelka mala napísané čísla $6 \cdot 2 = 12$ a $6 \cdot 3 = 18$, ku ktorým neskôr pripísala 6 a $6 \cdot 6 = 36$.

---

4. *Roboti Róbert a Hubert skladajú a rozoberajú mlynčeky na kávu. Pritom každý z nich mlynček zloží štyrikrát rýchlejšie, ako ho ten druhý rozoberie. Keď ráno prišli do dielne, niekoľko mlynčekov už tam bolo zložených. O 9:00 začal Hubert skladať a Róbert rozoberať, presne o 12:00 Hubert dokončil skladanie mlynčeka a Róbert rozoberanie iného. Spolu za túto zmenu pribudlo 27 mlynčekov. O 13:00 začal Róbert skladať a Hubert rozoberať, presne o 19:00 dokončil Róbert skladanie posledného mlynčeka a Hubert rozoberanie iného. Spolu za túto zmenu pribudlo 120 mlynčekov. Za ako dlho zloží mlynček Hubert? Za ako dlho ho zloží Róbert?* (Karel Pazourek)

Nápad. Koľko mlynčekov pribudne za hodinu v každej zo zmien?

Riešenie. V dopoludňajšej trojhodinovej zmene pribudlo 27 mlynčekov, čo zodpovedá $27 : 3 = 9$ mlynčekom za hodinu. Keďže Róbert rozoberá štyrikrát pomalšie, ako Hubert skladá, Hubert sám by zložil 9 mlynčekov za $\frac{3}{4}$ hodiny, t. j. 45 minút. Hubert teda zloží jeden mlynček za $45 : 9 = 5$ minút.

V odpoludňajšej šesťhodinovej zmene pribudlo 120 mlynčekov, čo zodpovedá $120 : 6 = 20$ mlynčekom za hodinu. Keďže tentoraz Róbert skladá a Hubert rozoberá, Róbert sám by zložil 20 mlynčekov za $\frac{3}{4}$ hodiny, t. j. 45 minút. Róbert teda zloží jeden mlynček za $45 : 20 = 2{,}25$ minút, t. j. 2 minúty a 15 sekúnd.

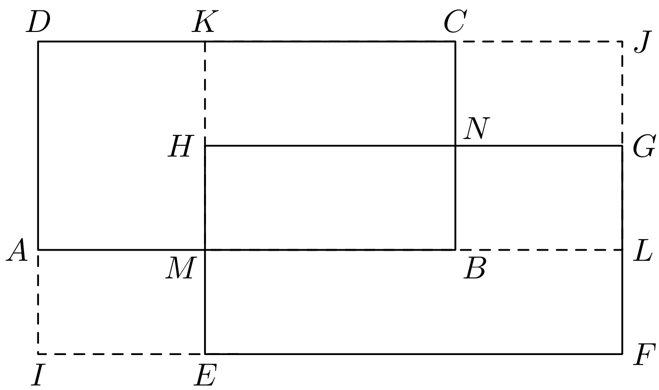
Iné riešenie. Ak h označuje počet mlynčekov, ktoré zloží Hubert za hodinu, a r počet mlynčekov, ktoré za hodinu zloží Róbert, tak za hodinu rozloží Hubert $\frac{1}{4}r$ mlynčekov a Róbert $\frac{1}{4}h$ mlynčekov. Informácie zo zadania vedú na rovnice

$$3\Big(h - \frac{1}{4}h\Big) = 27,$$
$$6\Big(r - \frac{1}{4}r\Big) = 120.$$

Riešením prvej rovnice je $h = 12$, teda Hubert zloží 12 mlynčekov za hodinu, t. j. 60 minút. Hubert zloží jeden mlynček za $60 : 12 = 5$ minút. Riešením druhej rovnice je $r = \frac{80}{3}$, teda Róbert zloží 80 mlynčekov za 3 hodiny, t. j. 180 minút. Róbert zloží jeden mlynček za $180 : 80 = 2{,}25$ minút.

---

5. *Zhodné obdĺžniky $ABCD$ a $EFGH$ sú umiestnené tak, že ich zhodné strany sú rovnobežné. Body I, J, K, L, M a N sú priesečníky predĺžených strán ako na obrázku. Obsah obdĺžnika $BNHM$ je $12\,cm^2$, obsah obdĺžnika $MBCK$ je $63\,cm^2$ a obsah obdĺžnika $MLGH$ je $28\,cm^2$. Určte obsah obdĺžnika $IFJD$.* (Eva Semerádová)



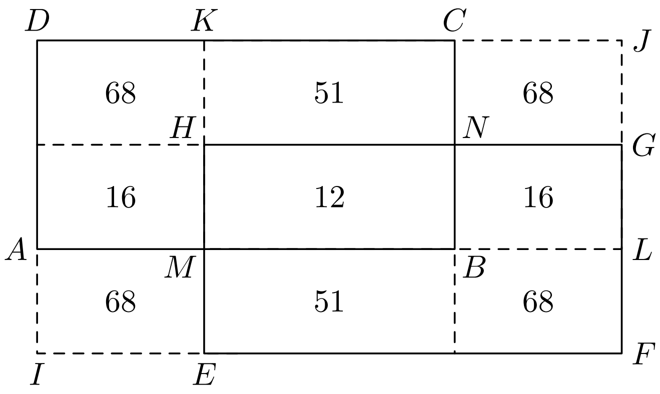
Nápad. Aké sú obsahy ďalších obdĺžnikov?

Riešenie. Obsah obdĺžnika $HNCK$ je $63 - 12 = 51\,(\mathrm{cm}^2)$, obsah obdĺžnika $BLGN$ je $28 - 12 = 16\,(\mathrm{cm}^2)$. Pomer obsahov obdĺžnikov $NGJC$ a $HNCK$ je rovnaký ako pomer dĺžok úsečiek NG a HN, a ten je rovnaký ako pomer obsahov obdĺžnikov $BLGN$ a $MBNH$. Teda

$$S_{NGJC} : 51 = 16 : 12 = 4 : 3,$$

a preto je obsah obdĺžnika $NGJC$ rovný $51 \cdot 4 : 3 = 68\,(\mathrm{cm}^2)$.

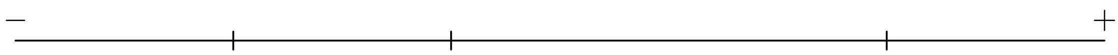
Keďže obdĺžniky $ABCD$ a $EFGH$ sú zhodné a posunuté, sú napr. úsečky IE a CJ zhodné a podobne je to s ďalšími dvojicami. Preto sú napr. obdĺžniky $IEMA$ a $NGJC$ zhodné, a teda majú rovnaký obsah. Podobne je to s ďalšími dvojicami:



Obsah obdĺžnika $IFJD$ je rovný $12 + 2 \cdot 51 + 2 \cdot 16 + 4 \cdot 68 = 418\,(\mathrm{cm}^2)$.

---

6. *Priamka predstavuje číselnú os a vyznačené body zodpovedajú číslam a, $-a$, $a+1$, avšak nie nutne v tomto poradí. Zostrojte body, ktoré zodpovedajú číslam 0 a 1. Preberte všetky možnosti.* (*Michaela Petrová*)



Nápad. Môže byť číslo $-a$ väčšie ako a?

Riešenie. Číslo $a+1$ je o 1 väčšie ako číslo a, leží teda na číselnej osi vpravo od čísla a a vzdialenosť týchto dvoch čísel je rovnaká ako vzdialenosť hľadaných čísel 0 a 1.

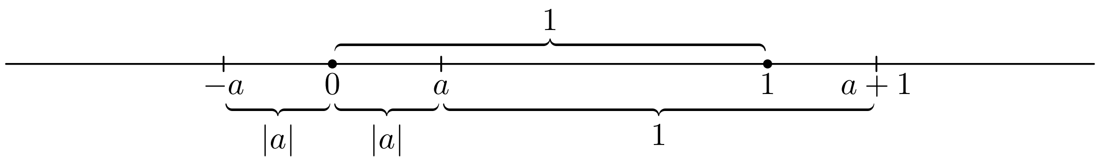
O vzájomnej polohe čísel a a $-a$ nič nevieme; záleží na tom, či je číslo a kladné alebo záporné. Keďže tiež nevieme nič o absolútnej hodnote $|a|$ (t. j. vzdialenosti od nuly), nemôžeme porovnať ani čísla $-a$ a $a+1$. Čísla a a $-a$ však majú rovnakú absolútnu hodnotu, preto 0 leží na číselnej osi uprostred medzi týmito číslami.

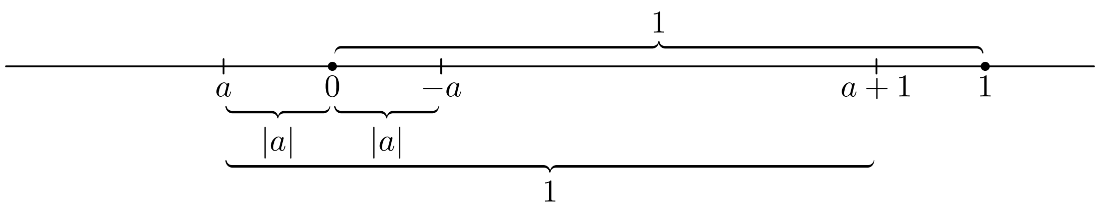
Musíme teda uvažovať nasledujúce tri možnosti usporiadania čísel na číselnej osi:

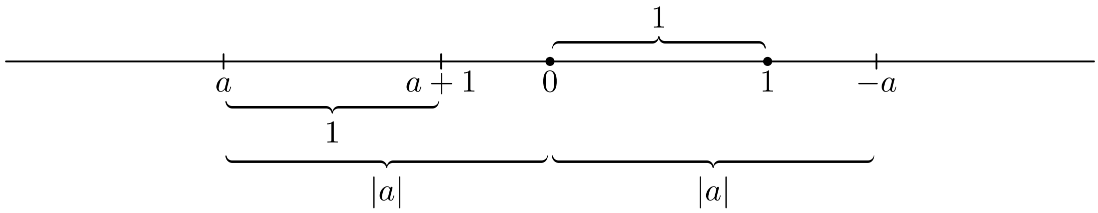
- $-a < a < a+1$,
- $a < -a < a+1$,
- $a < a+1 < -a$.

Vo všetkých troch prípadoch možno zostrojiť 0 a 1 takto:

- bod predstavujúci 0 je stredom úsečky s krajnými bodmi a a $-a$,
- bod predstavujúci 1 je vpravo od 0 v rovnakej vzdialenosti ako $a+1$ od a.







Poznámka. Pomer vzdialeností zadaných bodov na číselnej osi určuje hodnotu čísla a pre každé z troch možných usporiadaní. Ak by napr. tento pomer bol 1 : 2 (ako na obrázku v zadaní), tak by zodpovedajúce a bolo v prvom prípade $\frac{1}{2}$, v druhom prípade $-\frac{1}{6}$ a v treťom prípade $-\frac{3}{2}$.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Farkas Smitková, Libor Šimůnek, Erika Trojáková, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Veronika Bachratá, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Miroslava Farkas Smitková, Erika Trojáková , Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Vojtech Bálint

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2017