67. ročník Matematickej olympiády
2017/2018 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8*

<u>Informácia pre okresnú komisiu MO:</u>

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín okresných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: `skmo.sk`*. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu* `skmo@skmo.sk` *v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke* `skmo.sk/dokument.php?id=429` *nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.*

---

1. *Jožko si do zošita napísal nasledujúcu úlohu:*

$$M + A + M + R + A + D + M + A + T + E + M + A + T + I + K + U =$$

Potom nahradzoval písmená ciframi od 1 do 9, a to tak, že rôzne písmená nahradzoval rôznymi ciframi a rovnaké rovnakými. Aký najväčší súčet mohol Jožko dostať? A mohol Jožko dostať súčet 50?
Časom sa Jožkovi podarilo vytvoriť súčet 59. Ktorá cifra mohla v takom prípade zodpovedať písmenu T? Určte všetky možnosti. (*Erika Novotná*)

Riešenie. V Jožkovom výraze je práve deväť rôznych písmen, pričom písmená M a A sa opakujú štyrikrát a písmeno T dvakrát. Pri ľubovoľnom nahradení písmen ciframi podľa uvedených požiadaviek platí, že súčet $M + A + R + D + T + E + I + K + U$ je rovný súčtu všetkých cifier od 1 po 9, čo je 45. Jožkov súčet teda môžeme vyjadriť ako

$$4M + 4A + R + D + 2T + E + I + K + U = 3M + 3A + T + 45.$$

Najväčší súčet možno dostať tak, že najčastejšie sa opakujúce písmená sú nahradené najväčšími možnými ciframi. Stačí teda písmená M a A nahradiť ciframi 9 a 8 (v ľubovoľnom poradí) a písmeno T cifrou 7. Najväčší súčet, ktorý mohol Jožko dostať, je

$$3 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 7 + 45 = 103.$$

Súčet 50 zodpovedá takému nahradeniu písmen, že $3M + 3A + T + 45 = 50$, teda $3M + 3A + T = 5$. To však nie je možné, lebo pri akomkoľvek nahradení je posledný uvedený súčet určite väčší ako $3 + 3 + 1 = 7$. Súčet 50 Jožko dostať nemohol.

Súčet 59 zodpovedá takému nahradeniu písmen, že $3M + 3A + T + 45 = 59$, teda $3(M + A) + T = 14$. Pritom súčet $M + A$ je najmenej 3 $(= 1 + 2)$ a nanajvýš 4 (ak $M + A > 4$, tak $3(M + A) + T > 14$):

- ak $M + A = 1 + 2 = 3$, tak $T = 14 - 3 \cdot 3 = 5$,

- ak $M + A = 1 + 3 = 4$, tak $T = 14 - 3 \cdot 4 = 2$.

V oboch prípadoch písmená M, A a T zodpovedajú navzájom rôznym cifrám. Pri súčte 59 mohlo byť písmeno T nahradené buď cifrou 5, alebo 2.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za odpoveď na každú z jednotlivých otázok; 3 body za úplnosť a kvalitu komentára.

---

2. *Kocka s hranou 12 cm bola rozdelená na menšie navzájom zhodné kocôčky tak, že súčet všetkých ich povrchov bol osemkrát väčší ako povrch pôvodnej kocky. Určte, koľko bolo malých kocôčok a aké dlhé boli ich hrany.* (Marta Volfová)

Riešenie. Ak sú hrany kocôčok n-krát menšie ako hrana pôvodnej kocky, tak táto kocka bola rozdelená na $n \cdot n \cdot n = n^3$ kocôčok. Povrch kocky je $6 \cdot 12^2\,(\mathrm{cm}^2)$. Súčet povrchov všetkých kocôčok je

$$n^3 \cdot 6 \cdot \left(\frac{12}{n}\right)^2 = n \cdot 6 \cdot 12^2\,(\mathrm{cm}^2).$$

Aby bol tento súčet osemkrát väčší ako povrch pôvodnej kocky, musí byť $n = 8$. Kocka bola rozdelená na $8^3 = 512$ kocôčok a hrana každej z nich merala $12 : 8 = 1{,}5\,(\mathrm{cm})$.

Návrh hodnotenia. 2 body za vzťah medzi pomerom dĺžok hrán kocky a kocôčok ($1 : n$) a počtom všetkých kocôčok (n^3); 2 body za vyjadrenie a porovnanie povrchov; 2 body za doriešenie.

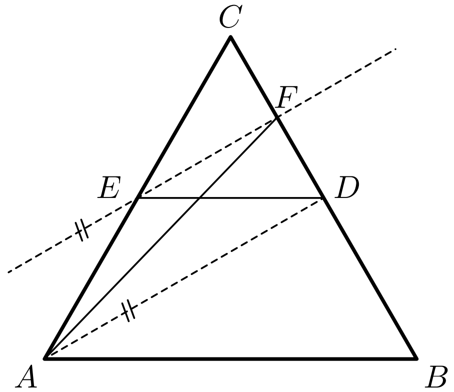
Poznámka. K tomu istému výsledku možno dôjsť aj postupným skúšaním delenia kocky, ktoré vedie k výpočtom zodpovedajúcim dosadzovaniu $n = 2, 3, \ldots$ do predchádzajúcich výrazov. V takom prípade prispôsobte hodnotenie vzhľadom na kvalitu komentára.

---

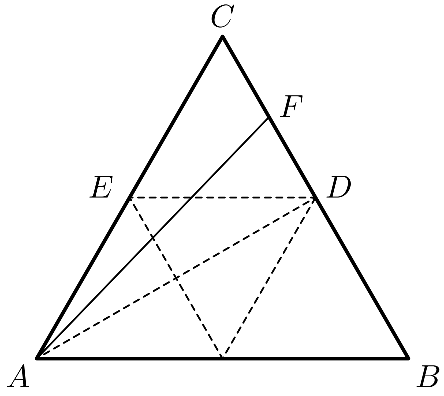
3. *V rovnostrannom trojuholníku ABC so stranou dĺžky 8 cm je bod D stred strany BC a bod E je stred strany AC. Bod F leží na úsečke BC tak, že obsah trojuholníka ABF je rovnaký ako obsah štvoruholníka $ABDE$. Vypočítajte dĺžku úsečky BF.* (Lucie Růžičková)

Riešenie. Ako štvoruholník $ABDE$, tak trojuholník ABF možno rozdeliť na dva trojuholníky, z ktorých ABD je spoločný obom. Zvyšné časti, t. j. trojuholníky ADE a ADF, preto musia mať rovnaký obsah. Tieto dva trojuholníky majú spoločnú stranu AD, preto musia mať aj rovnakú výšku na túto stranu. To znamená, že body E a F ležia na rovnobežke s priamkou AD.

Keďže je bod E stredom strany AC, je aj bod F stredom úsečky CD. Pritom bod D je stredom úsečky BC, bod F je preto v troch štvrtinách úsečky BC. Hľadaná dĺžka úsečky BF je $4 + 2 = 6$ cm.



Iné riešenie. Rovnostranný trojuholník ABC je svojimi strednými priečkami rozdelený na štyri zhodné trojuholníky, z ktorých tri tvoria štvoruholník $ABDE$. Preto aj obsah trojuholníka ABF je rovný trom štvrtinám obsahu trojuholníka ABC. Tieto dva trojuholníky majú rovnakú výšku zo spoločného vrcholu A, preto dĺžka strany BF je rovná trom štvrtinám dĺžky strany BC. Hľadaná dĺžka úsečky BF je 6 cm.



Iné riešenie. Úsečka ED je strednou priečkou trojuholníka ABC, preto je rovnobežná s AB a má dĺžku $8 : 2 = 4$ (cm). Štvoruholník $ABDE$ je lichobežníkom so základňami dĺžok 8 cm a 4 cm a výškou, ktorá je rovná polovici výšky trojuholníka ABC.

Ak veľkosť výšky trojuholníka ABC označíme v, tak obsah lichobežníka $ABDE$, resp. obsah trojuholníka ABF je

$$\frac{(8+4)\cdot\frac{1}{2}v}{2} = 3v, \quad \text{resp.} \quad \frac{|BF|\cdot v}{2}.$$

Podľa zadania sú tieto obsahy rovnaké, preto $|BF| = 6$ cm.

Návrh hodnotenia. 2 body za akýkoľvek poznatok vedúci k jednoznačnému vymedzeniu bodu F; 2 body za doriešenie; 2 body podľa kvality komentára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Patrik Bak, Martin Kollár, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, Oliver Ralík, E. Semerádová, Miroslava Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník

Recenzenti: Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Peter Novotný, Patrik Bak

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018