68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

1. *Nájdite všetky kladné celé čísla x a y, pre ktoré platí*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}.$$

(*Alžbeta Bohiniková*)

Nápad. Môžu byť obe neznáme súčasne väčšie ako napr. 14?

Riešenie. Pre rovnaké neznáme je riešením zrejme $x=y=8$.

Rôzne neznáme nemôžu byť obe súčasne menšie, resp. väčšie ako 8 (potom by totiž ľavá strana rovnice bola väčšia, resp. menšia ako $\frac{1}{4}$). Jedna neznáma teda musí byť menšia ako 8 a druhá väčšia ako 8. Vzhľadom na symetrickosť rovnice stačí ďalej uvažovať prípad, keď $x<y$. Za tohto predpokladu je $x<8$ a $y>8$, takže x môže nadobúdať iba hodnoty od 1 do 7.

Ak z rovnice vyjadríme y všeobecne pomocou x, dostaneme

$$y=\frac{4x}{x-4}. \tag{1}$$

Z toho je zrejmé, že y je kladné práve vtedy, keď $x>4$. Teda x môže nadobúdať iba hodnoty od 5 do 7. Pre tieto tri možnosti stačí preveriť, či y vychádza celé:

- pre $x=5$ vychádza $y=20$,
- pre $x=6$ vychádza $y=12$,
- pre $x=7$ vychádza $y=\frac{28}{3}$.

Celkom tak vidíme, že všetky dvojice (x,y), ktoré sú riešením úlohy, sú $(5,20)$, $(6,12)$, $(8,8)$, $(12,6)$ a $(20,5)$.

Iné riešenie. Ak z rovnice vyjadríme y všeobecne pomocou x, dostaneme (1). Tento výraz môžeme ďalej upraviť na „celú časť plus zvyšok“:

$$y=\frac{4x}{x-4}=\frac{4(x-4)+16}{x-4}=4+\frac{16}{x-4}. \tag{2}$$

Z toho je zrejmé, že y je kladné celé číslo práve vtedy, keď $x-4$ je kladným celým deliteľom čísla 16, a tých je práve päť:

- pre $x-4=1$ vychádza $x=5$ a $y=20$,
- pre $x-4=2$ vychádza $x=6$ a $y=12$,
- pre $x-4=4$ vychádza $x=8$ a $y=8$,
- pre $x-4=8$ vychádza $x=12$ a $y=6$,
- pre $x-4=16$ vychádza $x=20$ a $y=5$.

Tento výpis zahŕňa všetky riešenia úlohy.

Poznámka. Pri úprave zadanej rovnice na tvar (1) možno naraziť na ekvivalentnú rovnicu

$$xy-4x-4y=0. \tag{3}$$

Ľavá strana súhlasí s tromi sčítancami v roznásobení výrazu $(x-4)(y-4)$, chýba iba 16. Pričítaním 16 k obom stranám rovnice (3) dostávame

$$(x-4)(y-4) = 16.$$

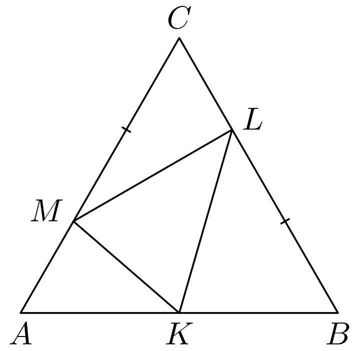
Všetky riešenia tak možno nájsť pomocou všetkých možných rozkladov čísla 16 na súčin dvoch kladných celých čísel. Tieto nápady sú len bezzlomkovou interpretáciou úpravy (2) a následného postupu.

---

2. *V rovnostrannom trojuholníku ABC je K stredom strany AB, bod L leží v tretine strany BC bližšie bodu C a bod M leží v tretine strany AC bližšie bodu A. Určte, akú časť obsahu trojuholníka ABC zaberá trojuholník KLM.* (Lucie Růžičková)

Nápad. Zadané body vymedzujú ďalšie trojuholníky. Zamyslite sa nad obsahmi niektorých z nich.

Riešenie. Obsah trojuholníka KLM vyjadríme ako rozdiel obsahu trojuholníka ABC a obsahov trojuholníkov AKM, KBL a MLC.



Pomer vzdialeností bodov M a C od bodu A je rovnaký ako pomer vzdialeností týchto bodov od priamky AB. Výška trojuholníka AKM idúca vrcholom M je teda tretinová vzhľadom k výške trojuholníka ABC idúcej vrcholom C. Súčasne strana AK prvého trojuholníka protiľahlá vrcholu M je polovičná vzhľadom k strane AB druhého trojuholníka protiľahlej vrcholu C. Trojuholník AKM preto zaberá $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ obsahu trojuholníka ABC.

Podobne, výška trojuholníka KBL idúca vrcholom L je dvojtretinová vzhľadom k výške trojuholníka ABC idúcej vrcholom C a príslušná strana KB prvého trojuholníka je polovičná vzhľadom k strane AB druhého trojuholníka. Trojuholník KBL preto zaberá $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ obsahu trojuholníka ABC.

Do tretice, výška trojuholníka CML idúca vrcholom L je tretinová vzhľadom k výške trojuholníka ABC idúcej vrcholom B a príslušná strana CM prvého trojuholníka je dvojtretinová vzhľadom k strane AC druhého trojuholníka. Trojuholník KBL preto zaberá $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ obsahu trojuholníka ABC.

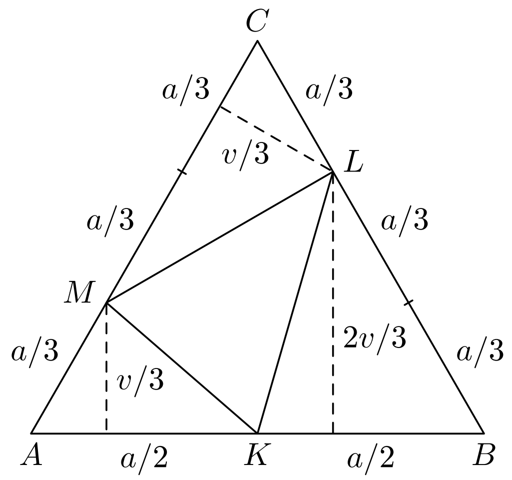
Dohromady, trojuholník KLM zaberá

$$1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}$$

obsahu trojuholníka ABC.

Poznámka. Všimnite si, že uvedené riešenie je platné pre všeobecný trojuholník ABC.

S predpokladom rovnostrannosti sú strany a výšky jednotlivých trojuholníkov naznačené v nasledujúcom obrázku (a označuje stranu a v výšku trojuholníka ABC).



S týmto označením je $S_{ABC} = \frac{1}{2}av$ a $S_{KLM} = \frac{5}{36}av$, teda $S_{KLM} = \frac{5}{18}S_{ABC}$.

---

3. *V našom meste sú tri kiná, ktorým sa hovorí podľa svetových strán. O ich otváracích hodinách je známe, že:*

- *každý deň je otvorené aspoň jedno kino,*
- *ak je otvorené južné kino, tak nie je otvorené severné kino,*
- *nikdy nie je otvorené súčasne severné a východné kino,*
- *ak je otvorené východné kino, tak je otvorené aj južné alebo severné kino.*

Vydali sme sa do južného kina a zistili sme, že je zatvorené. Ktoré zo zvyšných kín je určite otvorené? (*Monika Dillingerová*)

Nápad. Uvažujte všetky možnosti otvorenosti, resp. zatvorenosti kín bez obmedzujúcich podmienok.

Riešenie. Zaujímame sa o situáciu, keď je južné kino zatvorené. Bez ďalších informácií o otváracích hodinách by mohli nastať nasledujúce štyri prípady, ktoré postupne porovnáme s podmienkami zo zadania:

a) Ak by severné aj východné kino bolo otvorené, tak by sme boli v rozpore s treťou podmienkou. Táto situácia nenastane.
b) Ak by severné kino bolo otvorené a východné zatvorené, tak nie sme v rozpore so žiadnou z podmienok. Táto situácia je možná.
c) Ak by severné kino bolo zatvorené a východné otvorené, tak by sme boli v rozpore so štvrtou podmienkou. Táto situácia nenastane.
d) Ak by severné aj východné kino bolo zatvorené, tak by sme boli v rozpore s prvou podmienkou. Táto situácia nenastane.

Jediná situácia vyhovujúca všetkým podmienkam zo zadania je b): keď je južné kino zatvorené, tak je severné kino určite otvorené.

Iný nápad. Aké možnosti vyhovujú tretej podmienke?

Iné riešenie. Vzhľadom na tretiu podmienku môžeme štvrtú podmienku nahradiť nasledujúcou:

4'. ak je otvorené východné kino, tak je otvorené aj južné kino.

Podľa tretej podmienky môžeme rozlíšiť tri prípady:

a) Severné kino je otvorené a východné zatvorené. Potom podľa druhej podmienky je južné kino zatvorené.
b) Severné kino je zatvorené a východné otvorené. Potom podľa štvrtej podmienky (resp. jej práve uvedenej náhrady) je južné kino otvorené.
c) Severné aj východné kino je zatvorené. Potom podľa prvej podmienky je južné kino otvorené.

V žiadnom z týchto prípadov nie sme v rozpore s podmienkami, ktoré sme pri vyvodzovaní nepoužili. Všetky možné situácie otvorenosti (1), resp. zatvorenosti (0) kín uvádzame kvôli prehľadnosti v tabuľke:

S	1	0	0
V	0	1	0
J	0	1	1

Ak je južné kino zatvorené, tak je severné kino určite otvorené (a východné určite zatvorené).

Poznámka. Diskusia v riešení úlohy môže byť vedená rôznymi spôsobmi. Pre tieto účely znázorníme možnosti, ktoré pripúšťajú podmienky zo zadania samostatne – prázdne políčka môžu obsahovať ako 1, tak 0:

Prvá podmienka pripúšťa možnosti:

S	1		
V		1	
J			1

Druhá podmienka pripúšťa možnosti:

S	0	
V		
J	1	0

Tretia podmienka pripúšťa možnosti:

S	1	0	0
V	0	1	0
J			

Štvrtá podmienka pripúšťa možnosti:

S		1	1	
V	1	1	1	0
J	1		1	

Výber možností, ktoré vyhovujú všetkým štyrom podmienkam súčasne (teda „prienik“ týchto štyroch tabuliek), vedie k tabuľke na konci predchádzajúceho riešenia.

---

4. *Hotelier chcel vybaviť jedáleň novými stoličkami. V katalógu si vybral typ stoličky. Až pri zadávaní objednávky sa od výrobcu dozvedel, že v rámci zľavovej akcie ponúkajú každú štvrtú stoličku za polovičnú cenu a že teda oproti plánu môže ušetriť za sedem a pol stoličky. Hotelier si spočítal, že za pôvodne plánovanú čiastku môže zaobstarať o deväť stoličiek viac, ako zamýšľal. Koľko stoličiek chcel hotelier pôvodne kúpiť?*

(*Libor Šimůnek*)

Nápad. Najskôr riešte úlohu bez informácie, že za pôvodne plánovanú sumu možno pokryť o deväť stoličiek viac.

Riešenie. V akcii bola každá štvrtá stolička za polovičnú cenu. Ak mohol takto hotelier ušetriť za 7,5 stoličky, objednával 15 štvoríc stoličiek a nanajvýš tri ďalšie stoličky, t. j. objednával najmenej 60 a nanajvýš 63 stoličiek.

Oproti pôvodnému plánu si v akcii mohol dopriať o 9 stoličiek viac, t. j. najmenej 69 a nanajvýš 72 stoličiek. V prvom prípade je $69 = 17 \cdot 4 + 1$, teda úspora by predstavovala len $17 \cdot \frac{1}{2} = 8{,}5$ stoličiek, čo nezodpovedá predpokladu. Rovnaký záver platí aj pre ďalšie dve možnosti $70 = 17 \cdot 4 + 2$ a $71 = 17 \cdot 4 + 3$. Jedine pre $72 = 18 \cdot 4$ zodpovedá úspora práve 9 stoličkám.

Zo štyroch zvažovaných možností je iba posledná riešením úlohy. Hotelier chcel pôvodne kúpiť 63 stoličiek.

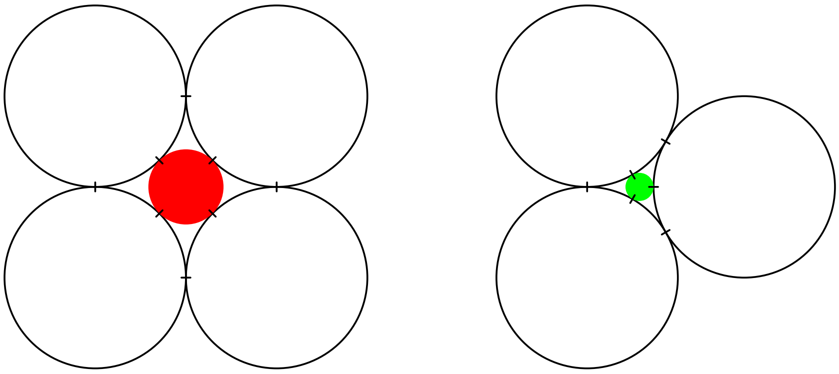
Iné riešenie. Rovnako ako v predchádzajúcom riešení určíme, že úspora za 7,5 stoličky zodpovedá objednávke najmenej 60 a nanajvýš 63 stoličiek ($7{,}5 = \frac{1}{2} \cdot 15$ a $15 \cdot 4 = 60$).

Podobne určíme, že úspora za 9 stoličiek zodpovedá objednávke najmenej 72 a nanajvýš 75 stoličiek ($9 = \frac{1}{2} \cdot 18$ a $18 \cdot 4 = 72$). Tento počet má byť zároveň o 9 väčší ako počet stoličiek v predchádzajúcej objednávke, teda úspora za 9 stoličiek má zodpovedať objednávke najmenej 69 a nanajvýš 72 stoličiek. Tieto dve podmienky sú splnené iba v jedinom prípade, ktorý zodpovedá počtu 72 v druhej, resp. 63 v prvej objednávke.

Hotelier chcel pôvodne kúpiť 63 stoličiek.

---

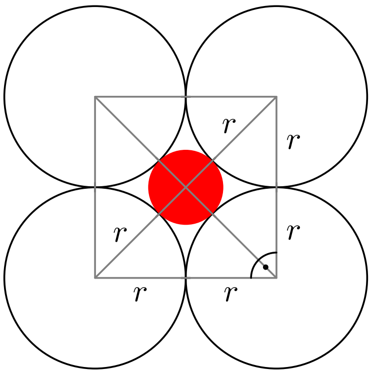
5. *Adam a Eva vytvárali dekorácie z navzájom zhodných bielych kruhov. Adam použil štyri kruhy, ktoré položil tak, že sa každý dotýkal dvoch iných kruhov. Medzi ne potom vložil iný kruh, ktorý sa dotýkal všetkých štyroch bielych kruhov, a ten vyfarbil červenou. Eva použila tri kruhy, ktoré položila tak, že sa dotýkali navzájom. Medzi ne potom vložila iný kruh, ktorý sa dotýkal všetkých troch bielych kruhov, a ten vyfarbila zelenou. Eva si všimla, že jej zelený kruh a Adamov červený kruh sú rôzne veľké, a začali spolu zisťovať, ako sa líšia. Vyjadrite polomery červeného a zeleného kruhu všeobecne pomocou polomeru bielych kruhov.* (*Marie Krejčová*)



Nápad. V akom vzťahu sú stredy dvoch dotýkajúcich sa kružníc a príslušný dotykový bod?

Riešenie. V nasledujúcom budeme opakovane používať poznatok, že spoločný bod dvoch dotýkajúcich sa kružníc leží na spojnici ich stredov. Polomer bielych kruhov budeme označovať r.

Stredy Adamových bielych kruhov tvoria vrcholy štvorca a stred červeného kruhu leží v strede tohto štvorca, teda v priesečníku jeho uhlopriečok. Priemer červeného kruhu je rovný rozdielu uhlopriečky uvedeného štvorca a dvoch polomerov r.



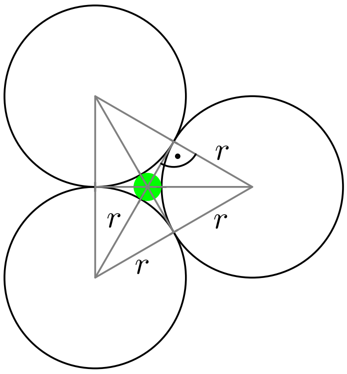
Pomocný štvorec má stranu $2r$, jeho uhlopriečka má podľa Pytagorovej vety veľkosť

$$\sqrt{4r^2 + 4r^2} = 2\sqrt{2}r.$$

Polomer červeného kruhu je teda rovný

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{2}r - 2r) = (\sqrt{2} - 1)r.$$

Stredy Eviných bielych kruhov tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka a stred zeleného kruhu leží v strede tohto trojuholníka, teda v priesečníku jeho výšok, resp. ťažníc. Polomer zeleného kruhu je rovný rozdielu vzdialenosti stredu, t. j. ťažiska uvedeného trojuholníka, od jeho vrcholu a polomeru r.



Pomocný rovnostranný trojuholník má stranu $2r$ a každá výška ho delí na pravouhlé trojuholníky s preponou $2r$ a odvesnou r. Druhá odvesna, teda táto výška, má podľa Pytagorovej vety veľkosť

$$\sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}r.$$

Vzdialenosť ťažiska rovnostranného trojuholníka od vrcholu je rovná dvom tretinám dĺžky ťažnice, t. j. práve vyjadrenej výšky. Polomer zeleného kruhu je teda rovný

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}r - r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}r.$$

---

6. *Prirodzené číslo N nazveme bombastické, ak neobsahuje vo svojom zápise žiadnu nulu a ak žiadne menšie prirodzené číslo nemá rovnaký súčin cifier ako číslo N. Karol sa najskôr zaujímal o bombastické prvočísla a tvrdil, že ich nie je veľa. Vypíšte všetky dvojciferné bombastické prvočísla. Potom Karol zvolil jedno bombastické číslo a prezradil nám, že obsahuje cifru 3 a že iba jedna z jeho ďalších cifier je párna. O ktorú párnu cifru sa mohlo jednať?* (*Michal Rolínek*)

Všetky dvojciferné prvočísla sú vypísané v prvom riadku nasledujúcej tabuľky. V druhom riadku sú uvedené ciferné súčiny jednotlivých čísel. V treťom riadku sú najmenšie prirodzené čísla so zodpovedajúcimi cifernými súčinmi (tieto čísla možno určiť porovnaním rozkladov so všetkými deliteľmi menšími ako 10). Dvojciferných bombastických prvočísel je sedem a v tabuľke sú vyznačené tučne.

11	13	17	19	23	**29**	31	**37**	41	43	**47**	53	**59**	61	**67**	71	73	**79**	83	**89**	97
1	3	7	9	6	18	3	21	4	12	28	15	45	6	42	7	21	63	24	72	63
1	3	7	9	6	29	3	37	4	26	47	35	59	6	67	7	37	79	38	89	79

V predchádzajúcom výpise si môžeme všimnúť niekoľko vecí súvisiacich s druhou časťou úlohy. Číslo 23 nie je bombastické, pretože 6 je menšie číslo s rovnakým ciferným súčinom. Všeobecnejšie, žiadne číslo obsahujúce cifry 2 a 3 nemôže byť bombastické, lebo vynechaním týchto dvoch cifier a doplnením 6 na ľubovoľné miesto dostaneme menšie číslo s rovnakým ciferným súčinom (napr. pre $\underline{2}7\underline{3}7$ je jedno z takých čísel $\underline{6}77$).

Podobne, číslo 34 nie je bombastické, pretože 26 je menšie číslo s rovnakým ciferným súčinom. Teda ani žiadne číslo obsahujúce cifry 3 a 4 nemôže byť bombastické (pozri napr. čísla $\underline{3}8\underline{4}$ a $\underline{2}8\underline{6}$). Do tretice, číslo 36 nie je bombastické, pretože 29 je menšie číslo s rovnakým ciferným súčinom. Teda ani žiadne číslo obsahujúce cifry 3 a 6 nemôže byť bombastické (pozri napr. čísla $2\underline{3}4\underline{6}$ a $2\underline{29}4$).

Zato vidíme, že číslo 38 bombastické je. Jediná párna cifra, ktorá môže byť s 3 v Karolovom bombastickom čísle je teda 8.

Poznámka. V tabuľke v prvej časti úlohy nebolo nutné uvažovať čísla obsahujúce cifru 1 ani čísla, ktoré majú na mieste desiatok väčšiu cifru ako na mieste jednotiek – také čísla nikdy nie sú bombastické. S týmto postrehom stačilo testovať iba osem z uvedených čísel.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2018