68. ročník Matematickej olympiády
2018/2019 *Riešenia úloh okresného kola kategórie Z9*

Informácia pre okresnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie opravených riešení okresných kôl aj s výsledkovou listinou predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 17. februára.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu okresného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

---

1. *Marienka napísala na tabuľu dve rôzne prirodzené čísla. Marta si vzala kartičku, na ktorej jednu stranu napísala súčet Marienkiných čísel a na druhú stranu ich súčin. Jedno z čísel na kartičke bolo prvočíslo a súčet čísel z oboch strán kartičky bol 97. Ktoré čísla napísala Marienka na tabuľu?* (Libuše Hozová)

Riešenie. Čísla na tabuli označíme x a y. Na jednej strane kartičky tak bolo napísané číslo $x + y$, na druhej strane číslo $x \cdot y$ a platilo

$$x + y + xy = 97. \tag{1}$$

Ľavá strana súhlasí s tromi sčítancami v roznásobení výrazu $(x+1)(y+1)$, chýba iba 1. Pričítaním 1 k obom stranám rovnice (1) dostávame

$$(x + 1)(y + 1) = 98. \tag{2}$$

Keďže x a y sú prirodzené čísla, činitele na ľavej strane tejto rovnice musia byť aspoň 2. Číslo 98 možno vyjadriť ako súčin dvoch prirodzených čísel väčších ako 1 iba týmito spôsobmi (poradie činiteľov ignorujeme):

$$2 \cdot 49 = 98, \quad 7 \cdot 14 = 98. \tag{3}$$

Prvej možnosti zodpovedajú čísla $x = 1$ a $y = 48$, pre ktoré je $x + y = 49$ a $xy = 48$. Ani jedno z týchto dvoch čísel nie je prvočíslom, preto táto možnosť nevyhovuje zadaniu úlohy.

Druhej možnosti zodpovedajú čísla $x = 6$ a $y = 13$, pre ktoré je $x + y = 19$ a $xy = 78$. Číslo 19 je a číslo 78 nie je prvočíslom, čo vyhovuje zadaniu úlohy. Marienka napísala na tabuľu čísla 6 a 13.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za vyjadrenie (1) a úpravu (2); 2 body za rozklady (3); 2 body za rozbor možností a záver.

Iné riešenie. Pri rovnakom označení ako vyššie môžeme z rovnice (1) vyjadriť y pomocou x:

$$y = \frac{97 - x}{1 + x}. \tag{4}$$

Postupným dosadzovaním prirodzených čísel za x môžeme vyjadriť y a overiť, či sa jedná o prirodzené číslo a či jedno z čísel $x + y$ a xy je prvočíslom:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	48	$\frac{95}{3}$	$\frac{47}{2}$	$\frac{93}{5}$	$\frac{46}{3}$	13	$\frac{45}{4}$	$\frac{89}{9}$	...
$x + y$	49					**19**			
xy	48					78			

Medzi uvedenými možnosťami je jediná vyhovujúca dvojica čísel 6 a 13. Teraz by sa mali preveriť ešte ostatné dosadenia za x až po 96 (aby y bolo kladné). To však nie je nutné, keďže s rastúcim x hodnota y stále klesá a je určite menšia ako 9 (keby x aj y boli súčasne väčšie alebo rovné 9, tak by hodnota $x + y + xy$ bola väčšia alebo rovná $9 + 9 + 81 = 99$). Vzhľadom na symetrickosť úlohy sa preto všetky riešenia musia vyskytovať v uvedenej tabuľke.

Marienka napísala na tabuľu čísla 6 a 13.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za vyjadrenia (1) a (4); 2 body za dosadzovanie a overovanie ako v tabuľke; 2 body za úplnosť diskusie a záver.

Poznámka. Lomený výraz (4) môžeme vyjadriť v tvare „celá časť plus zvyšok“ takto:

$$y = \frac{97 - x}{1 + x} = \frac{-(1 + x) + 98}{1 + x} = -1 + \frac{98}{1 + x}.$$

Keďže x a y majú byť prirodzené čísla, musí byť $1 + x$ kladným vlastným deliteľom čísla 98, a také delitele máme práve štyri: 2, 7, 14 a 49. Z toho dostaneme dve možnosti (až na poradie x a y), z ktorých jedna vyhovuje všetkým požiadavkám. Tento postup možno chápať ako inú interpretáciu rovnice (2) a následných úvah.

---

2. *Máme kváder, ktorého jedna hrana je päťkrát dlhšia ako iná jeho hrana. Keby sme výšku kvádra zväčšili o 2 cm, zväčšil by sa jeho objem o 90 cm^3. Keby sme výšku takto zväčšeného kvádra zmenili na polovicu, bol by objem nového kvádra rovný trom pätinám objemu pôvodného kvádra. Aké môžu byť rozmery pôvodného kvádra? Určte všetky možnosti.* (Eva Semerádová)

Riešenie. Objem kvádra je rovný súčinu obsahu podstavy a veľkosti výšky. Zmena výšky o 2 cm, spôsobuje zmenu objemu o 90 cm^3; zodpovedajúca podstava má preto obsah $90 : 2 = 45\,(\mathrm{cm}^2)$.

Pri ďalšej zmene výšky sa podstava nemení, preto zmena objemu kvádra na tri pätiny zodpovedá zmene výšky tiež na tri pätiny. Ak označíme výšku pôvodného kvádra v centimetroch v, platí

$$\frac{v + 2}{2} = \frac{3}{5}v.$$

Z toho sa ľahko vyjadrí $v = 10\,\mathrm{cm}$.

Poslednou nevyužitou informáciou zo zadania je, že jedna hrana kvádra je päťkrát dlhšia ako iná jeho hrana. Môžu nastať tri možnosti:

a) Jedna hrana podstavy je päťkrát dlhšia ako výška, t. j. 50 cm. Odtiaľ druhá hrana podstavy meria $45 : 50 = 0{,}9$ (cm).
b) Jedna hrana podstavy je päťkrát kratšia ako výška, t. j. 2 cm. Odtiaľ druhá hrana podstavy meria $45 : 2 = 22{,}5$ (cm).
c) Jedna hrana podstavy je päťkrát dlhšia ako druhá jej hrana. Ak označíme veľkosť kratšej z týchto hrán v centimetroch a, platí $a(5a) = 45$, teda $a^2 = 9$ a $a = 3$ (cm). Odtiaľ dlhšia hrana podstavy meria $5 \cdot 3 = 15$ (cm).

Rozmery pôvodného kvádra v centimetroch môžu byť $0{,}9 \times 50 \times 10$, alebo $2 \times 22{,}5 \times 10$, alebo $3 \times 15 \times 10$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za obsah podstavy; 2 body za výšku pôvodného kvádra; po 1 bode za každé správne riešenie.

---

3. *Z cifier 3, 4, 5, 7 a 9 boli vytvorené všetky možné trojciferné čísla tak, aby sa každá cifra vyskytovala v každom čísle nanajvýš raz. Určte počet takto vzniknutých čísel a ich celkový súčet.* (Marta Volfová)

Riešenie. Pri tvorení trojciferných čísel s uvedenými vlastnosťami je možné postupovať nasledovne:

Prvé miesto možno obsadiť ľubovoľnou z piatich uvedených cifier, t. j. 5 možností. Pre každé z týchto obsadení možno druhé miesto obsadiť ľubovoľnou zo štyroch zvyšných cifier, t. j. celkom $5 \cdot 4 = 20$ možností. Pre každé z týchto obsadení možno tretie miesto obsadiť ľubovoľnou z troch zvyšných cifier, t. j. celkom $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností. Takto vzniknutých trojciferných čísel je teda 60.

Na určenie celkového súčtu všetkých týchto čísel si stačí uvedomiť, že na každom mieste sa každá z piatich cifier vyskytuje dvanásťkrát ($5 \cdot 12 = 60$). Súčet cifier na vybranom mieste vo všetkých uvažovaných číslach je rovný

$$12 \cdot (3 + 4 + 5 + 7 + 9) = 12 \cdot 28 = 336.$$

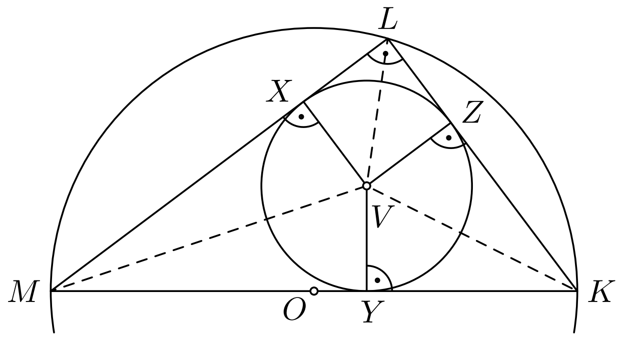
Podľa príslušného miesta sa táto hodnota v celkovom súčte vyskytuje jedenkrát, desaťkrát a stokrát. Súčet všetkých uvažovaných čísel je preto rovný

$$336 \cdot (1 + 10 + 100) = 336 \cdot 111 = 37\,296.$$

Návrh hodnotenia. 2 body za počet čísel; 2 body za celkový súčet; 2 body za kvalitu, resp. úplnosť komentára.

4. *V pravouhlom trojuholníku je polomer jemu opísanej kružnice 14,5 cm a polomer jemu vpísanej kružnice 6 cm. Určte obvod tohto trojuholníka.* (*Libuše Hozová*)

Riešenie. Stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku je v strede jeho prepony; tento bod je na obrázku označený O. Stred kružnice vpísanej je spoločným priesečníkom osí vnútorných uhlov trojuholníka; tento bod je označený V a body dotyku kružnice s jednotlivými stranami trojuholníka sú označené X, Y a Z:



Polomer kružnice opísanej je 14,5 cm, prepona KM je priemerom tejto kružnice, teda veľkosť KM je 29 cm.

Polomer kružnice vpísanej je 6 cm, a to je aj veľkosť úsečiek VX, VY a VZ. Zhodné úsečky VX a VZ sú susednými stranami v pravouholníku $VXLZ$, tento pravouholník je preto štvorcom a veľkosti úsečiek LX a LZ sú tiež 6 cm.

Trojuholníky KYV a KZV sú oba pravouhlé, majú zhodné uhly pri vrchole K a spoločnú stranu KV. Preto sú tieto trojuholníky zhodné, teda úsečky KY a KZ sú zhodné; ich veľkosť na chvíľu označme a. Z obdobného dôvodu sú zhodné aj úsečky MX a MY; ich veľkosť označíme b.

Celkom tak dostávame $a + b = |KM| = 29$ cm a obvod trojuholníka KLM vieme vyjadriť ako

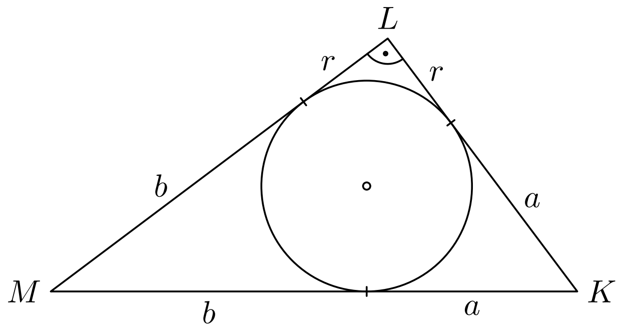
$$2a + 2b + 2 \cdot 6 = 2(a + b) + 12 = 70\,(\text{cm}).$$

Návrh hodnotenia. 1 bod za veľkosť prepony; 3 body za vyjadrenie obvodu; 2 body za kvalitu komentára.

Poznámka. Ak označíme polomer kružnice opísanej R a veľkosť prepony $|KM| = l$, tak prvé pozorovanie v uvedenom riešení môžeme všeobecne zapísať $l = 2R$, teda

$$R = \frac{l}{2}. \tag{1}$$

Ak ďalej označíme polomer kružnice vpísanej r a veľkosti odvesien $|LM| = k$ a $|KL| = m$, tak ďalšie závery z predchádzajúceho riešenia sú $m = r + a$, $k = r + b$ a $l = a + b$:



Z toho vyplýva, že $k + m - l = 2r$, teda

$$r = \frac{k + m - l}{2}, \tag{2}$$

a obvod trojuholníka možno všeobecne vyjadriť ako

$$k + m + l = 2r + 4R. \tag{3}$$

Vzorce (1) a (2) možno považovať za známe a vyskytujú sa v niektorých tabuľkách. Na nich založené riešenie (3) by teda malo byť posudzované ako správne.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019