Informácia pre krajskú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 12 alebo viac bodov.

1. *Adela napísala na tabuľu dve kladné celé čísla a dala Lukášovi a Petrovi za úlohu určiť kladný rozdiel druhých mocnín týchto dvoch čísel. Lukáš namiesto toho určil druhú mocninu rozdielu daných dvoch čísel. Vyšlo mu tak číslo o 4 038 menšie ako Petrovi, ktorý výpočet vykonal správne. Ktoré dve čísla mohla Adela napísať na tabuľu? Určte všetky možnosti.* (*Lucie Růžičková*)

Riešenie. Čísla napísané na tabuli označíme a a b, pričom budeme predpokladať, že $a \geqq b$. Zo zadania postupne vyplýva

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - b^2 - 4\,038,\\ a^2 - 2ab + b^2 &= a^2 - b^2 - 4\,038,\\ 2ab - 2b^2 &= 4\,038,\\ b(a-b) &= 2\,019,\end{aligned}$$

pričom čísla b a $a-b$ sú podľa predpokladov kladné.

Rozklad čísla 2 019 na súčin prvočísel je $3 \cdot 673$. Číslo 2 019 možno preto vyjadriť ako súčin dvoch kladných celých čísel nasledujúcimi spôsobmi:

$$2\,019 = 1 \cdot 2\,019 = 2\,019 \cdot 1 = 3 \cdot 673 = 673 \cdot 3.$$

Poradie činiteľov zdôrazňujeme kvôli všetkým možným priradeniam b a $a-b$. Zodpovedajúce dvojice čísel (a,b) sú $(2\,020, 1)$, $(2\,020, 2\,019)$, $(676, 3)$ a $(676, 673)$.

Návrh hodnotenia. 1 bod za zostavenie východiskovej rovnice; 2 body za úpravu na tvar súčinu; 1 bod za rozklad na súčin prvočísel; 2 body za určenie vyhovujúcich dvojíc.

Pri inom postupe riešenia dajte 2 body za určenie vyhovujúcich dvojíc a 4 body za kvalitu komentára, najmä zdôvodnenie, že viac riešení neexistuje.

2. *Na ostrove žijú dva druhy domorodcov: Poctivci, ktorí vždy hovoria pravdu, a Klamári, ktorí vždy klamú. Keď cudzinec stretol troch domorodcov, Alana, Bruna a Ctibora, spýtal sa ich, do ktorej skupiny patria.*

Alan oznámil: „Bruno je Klamár.“
Bruno povedal: „Alan a Ctibor sú buď obaja Klamári, alebo obaja Poctivci.“
Ctibor sa nevyjadril.

Mohol cudzinec pri niektorom z týchto domorodcov s istotou určiť, či je Poctivec, alebo Klamár? (*Marta Volfová*)

Riešenie. Najskôr predpokladajme, že Alan je Poctivec. V takom prípade by jeho výrok bol pravdivý a Bruno by bol Klamár. Brunov výrok by teda nebol pravdivý a to by znamenalo, že Alan a Ctibor by patrili do rôznych skupín. Keďže Alan je Poctivec, Ctibor by bol Klamár.

Teraz predpokladajme, že Alan je Klamár. V takom prípade by jeho výrok nebol pravdivý a Bruno by bol Poctivec. Brunov výrok by teda bol pravdivý a to by znamenalo, že Alan a Ctibor by patrili do rovnakej skupiny. Keďže Alan je Klamár, Ctibor by bol tiež Klamár.

S istotou možno určiť, že Ctibor je Klamár.

Iné riešenie. Uvažujme všetky možné prípady, keď pri každom z troch domorodcov (A, B, C) uvažujeme každý z dvoch prípadov (P, K). Celkom dostávame osem možností, ktoré postupne porovnáme s výrokmi Alana a Bruna. Prípadný spor s niektorým z týchto výrokov je vyznačený v poslednom riadku tabuľky:

A	P	P	P	P	K	K	K	K
B	P	P	K	K	P	P	K	K
C	P	K	P	K	P	K	P	K
spor s	A	A B	B		B		A	A B

S istotou možno určiť, že Ctibor je Klamár.

Návrh hodnotenia. 2 body za správny záver; 4 body za kvalitu komentára.

---

3. *Keď číslo X vydelím číslom Y, dostanem číslo Z a zvyšok 27. Keď číslo X vydelím číslom Z, dostanem číslo $1{,}1 \cdot Y$ a zvyšok 3. Ktoré čísla X, Y, Z vyhovujú uvedeným podmienkam? Určte všetky možnosti.* (*Libuše Hozová*)

Riešenie. Zo zadania máme dve rovnosti:

$$X = Y \cdot Z + 27 = 1{,}1 \cdot Y \cdot Z + 3.$$

Úpravami druhej rovnosti dostávame $0{,}1 \cdot Y \cdot Z = 24$, teda $Y \cdot Z = 240$. Dosadením späť zisťujeme, že $X = 267$.

Delenie so zvyškom sa týka celých čísel. Všetky čísla X, Y, Z a $1{,}1 \cdot Y$ preto musia byť celé. Z toho vyplýva, že číslo Y musí byť násobkom 10. Zvyšok po delení je menší ako deliteľ. Preto musí byť $Z \geqq 4$ a $Y \geqq 28$, čo spolu s predchádzajúcim záverom dáva $Y \geqq 30$.

Z rovnosti $Y \cdot Z = 240$ a požiadavky $Z \geqq 4$ dostávame $Y \leqq 240 : 4 = 60$. Podobne z požiadavky $Y \geqq 30$ dostávame $Z \leqq 240 : 30 = 8$. Takto sme odhalili dve vyhovujúce dvojice čísel Y a Z. Všetky riešenia dostaneme systematickým rozborom možností v rámci uvedených obmedzení:

Y	30	40	50	60
Z	8	6		4

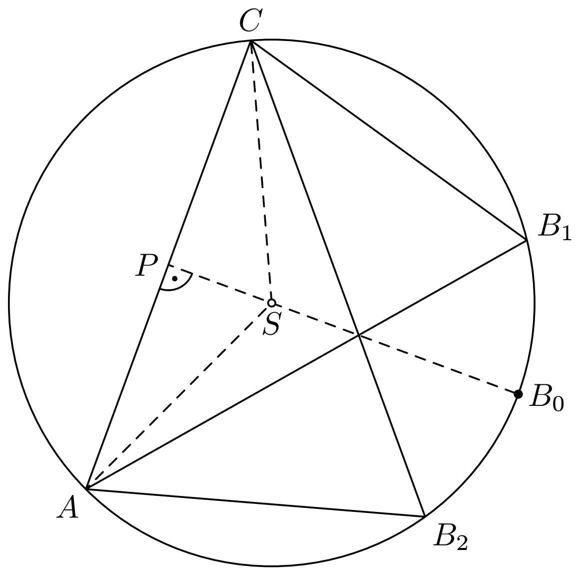
Vyhovujúce trojice čísel (X, Y, Z) sú $(267, 30, 8)$, $(267, 40, 6)$ a $(267, 60, 4)$.

Návrh hodnotenia. Po 1 bode za vyjadrenie $Y \cdot Z = 240$ a $X = 267$; po 1 bode za každé z troch riešení; 1 bod za kvalitu komentára.

Poznámka. V uvedenom riešení možno výhodne využiť prvočíselný rozklad $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

4. *Daná je kružnica so stredom S a polomerom $39\,\mathrm{mm}$. Do kružnice máme vpísať trojuholník ABC tak, aby veľkosť strany AC bola $72\,\mathrm{mm}$ a bod B ležal v polrovine určenej priamkou AC a bodom S. Zo zadaných údajov vypočítajte, akú veľkosť má mať výška trojuholníka ABC z vrcholu B, aby úloha mala dve riešenia.* (Marie Krejčová)

Riešenie. Veľkosť strany AC je menšia ako priemer kružnice, teda táto strana neobsahuje stred S. Výška trojuholníka ABC z vrcholu B môže byť ľubovoľne malá, ale nemôže byť ľubovoľne veľká: táto výška je najväčšia práve vtedy, keď obsahuje stred S. V takom prípade má úloha jediné riešenie (zodpovedajúci trojuholník je rovnoramenný) a veľkosť výšky je rovná veľkosti úsečky PB_0 ako na obrázku:



Veľkosť PB_0 je rovná súčtu veľkostí úsečiek PS a SB_0. Veľkosť úsečky SB_0 je rovná polomeru kružnice, t. j. $39\,\mathrm{mm}$. Veľkosť úsečky PS určíme pomocou Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku APS:

$$|PS| = \sqrt{|AS|^2 - |AP|^2} = \sqrt{39^2 - 36^2} = \sqrt{225} = 15\,(\mathrm{mm}).$$

Teda hraničná veľkosť výšky je $39 + 15 = 54\,(\mathrm{mm})$. Úloha má dve riešenia, ak je výška z vrcholu B menšia ako $54\,\mathrm{mm}$ (a väčšia ako $0\,\mathrm{mm}$).

Návrh hodnotenia. 3 body za vyjadrenie hraničnej hodnoty; 3 body za rozbor možností a kvalitu komentára.

Odpovede založené len na odhade alebo meraní z narysovaného obrázka hodnoťte 0 bodmi.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Svetlana Bednářová, Alžbeta Bohiniková, L. Dedková, Monika Dillingerová, L. Hozová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, M. Krejčová, M. Mach, Erika Novotná, K. Pazourek, M. Petrová, E. Semerádová, Miroslava Farkas Smitková, L. Šimůnek, M. Volfová, V. Žádník
Recenzenti:	Alžbeta Bohiniková, Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Katarína Jasenčáková, Miroslava Farkas Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2019