2009/2010
59. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh výberového sústredenia*

(*Sústredenie sa konalo 11. – 17. 4. 2010.*)

1. Množina M obsahuje všetky také prirodzené čísla, ktoré sa dajú napísať v tvare n^2+n pre nejaké prirodzené číslo n. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k>1$ existujú $a_1, a_2, \dots, a_k, b \in M$ také, že $a_1 < a_2 < \dots < a_k < b$ a $a_1 + a_2 + \dots + a_k = b$.

2. V rovine je daný trojuholník ABC a jeho opísaná kružnica k. Kružnica l so stredom O sa dotýka kružnice k v bode P a úsečky BC v bode Q. Vieme, že bod P leží na oblúku kružnice k nad tetivou BC, ktorý neobsahuje bod A. Dokážte, že ak platí $|\measuredangle CAO| = |\measuredangle BAO|$, potom aj $|\measuredangle PAO| = |\measuredangle QAO|$.

3. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, ktoré pre všetky reálne x, y spĺňajú

$$f(f(x)+y) = f(x^2-y) + 4f(x)y.$$

4. Nech n je nepárne celé číslo väčšie ako 1 a nech $c_1, c_2, \dots, c_n$ sú kladné celé čísla. Pre každú permutáciu $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ čísel 1, 2, …, n definujeme

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i.$$

Dokážte, že existujú dve rôzne permutácie a, b čísel 1, 2, …, n také, že rozdiel $S(a) - S(b)$ je deliteľný číslom $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

5. Trojposchodové schodisko so šírkou dva je vyrobené z 12 jednotkových kociek. Určte, pre ktoré n sa dá kocka s rozmermi $n \times n \times n$ poskladať iba pomocou takýchto schodísk.

6. Pre postupnosť $\{a_n\}_{n \geqq 1}$ kladných celých čísel platí, že $a_1 = 1$ a pre $n \geqq 2$ je

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} - n & \text{ak } a_{n-1} > n, \\ a_{n-1} + n & \text{ak } a_{n-1} \leqq n. \end{cases}$$

Nech S je množina takých indexov n, že $a_n = 2\,010$.

a) Dokážte, že S obsahuje nekonečne veľa prvkov.
b) Nájdite najmenšie číslo patriace do S.

7. Trojuholník ABC je vpísaný do kružnice k. Osi jeho vnútorných uhlov pretínajú kružnicu k druhýkrát v bodoch A', B' a C'. Dokážte, že obsah trojuholníka $A'B'C'$ je väčší alebo rovný obsahu trojuholníka ABC.

8. Pre štyri kladné celé čísla platí, že druhá mocnina súčtu ľubovoľných dvoch z nich je deliteľná súčinom zvyšných dvoch. Dokážte, že aspoň tri čísla spomedzi nich musia byť rovnaké.

9. Uvažujme prvočíslo p väčšie ako 5. Nech a, b a c sú také celé čísla, že rozdiel žiadnych dvoch z nich nie je deliteľný prvočíslom p. Ďalej i, j a k sú nezáporné celé čísla, pričom výraz $i+j+k$ je deliteľný číslom $p-1$. Navyše platí, že pre ľubovoľné celé číslo x je výraz

$$(x-a)(x-b)(x-c)[(x-a)^i(x-b)^j(x-c)^k-1]$$

deliteľný prvočíslom p. Dokážte, že každé z čísel i, j a k je deliteľné číslom $p-1$.

10. Majme ľubovoľný trojuholník ABC. Kružnica vpísaná do tohto trojuholníka sa dotýka strany AB v bode Z a strany AC v bode Y. Úsečky BY a CZ sa pretínajú v bode G. Označíme R a S také body v rovine, že štvoruholníky $BCYR$ a $BCSZ$ sú rovnobežníky. Dokážte, že veľkosti úsečiek GR a GS sú rovnaké.

11. Univerzitu navštevuje 2^{n+1} študentov, pričom $n \geqq 2$ a žiadni dvaja študenti nie sú rovnako starí. Na univerzite funguje 2^n korešpondenčných seminárov pre talentovanú mládež. Každý seminár má za vedúcich (organizátorov) niekoľko dobrovoľníkov z radov študentov univerzity. Žiadne dva semináre nevznikli v tom istom čase, vznikali postupne. Každý študent môže robiť vedúceho vo viacerých seminároch, ale len ak sa tým neporušuje jedno dôležité pravidlo. Nemôže existovať spomedzi ním organizovaných seminárov dvojica AKS a BKS a dvojica od neho mladších študentov a a b takých, že a je mladší od b, a robí vedúceho v AKS, b robí vedúceho v BKS a zároveň BKS je novší ako AKS. Dokážte, že aspoň jeden korešpondenčný seminár trpí nedostatkom vedúcich, teda že ich nemá viac ako $4n$.

12. Nech a, b, c, d sú (v tomto poradí) dĺžky strán AB, BC, CD, DA dotyčnicového štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že platí

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{c^2}{c+d} \geqq \frac{a+c}{2}.$$

13. Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré je číslo p^3 deliteľom čísla

$$1^{3p}+2^{3p}+3^{3p}+\ldots+(p-1)^{3p}.$$

14. Konvexný štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice. Priamky AB a CD sa pretínajú v bode P, priamky AD a BC sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že

$$|PQ|^2 = |PA| \cdot |PB| + |QB| \cdot |QC|.$$

15. Na šachovnici $n \times n$ je obvod (a nič iné) obtiahnutý červenou. Dvaja hráči, Aladár a Boris, hrajú takúto hru: Hráč si v každom ťahu zvolí políčko šachovnice a obtiahne červenou jednu jeho stranu (ktorá ešte nebola červená). Tým vznikne medzi dvoma susednými políčkami nepriechodná hranica. Hra končí, keď je šachovnica červenými hranicami rozdelená na dve časti. Hráč, ktorý šachovnicu takto rozdelil, prehráva. Začína Aladár. Určte, ktorý hráč dokáže pre dané n vždy vyhrať a popíšte jeho víťaznú stratégiu.

16. Na stole leží v jednom dlhom rade vedľa seba 2009 kariet. Každá karta je z jednej strany zlatá, z druhej čierna. Na začiatku sú všetky karty otočené zlatou farbou nahor. Dvaja hráči (stojaci na tej istej strane stola) hrajú hru, pričom sa striedajú v ťahoch. V každom ťahu hráč zvolí blok tesne za sebou idúcich 50 kariet, z ktorých karta ležiaca najviac vľavo je otočená zlatou farbou nahor, a všetkých 50 kariet otočí (teda karty, ktoré boli zhora zlaté, budú čierne, a naopak). Hráč, ktorý už nemôže urobiť žiadny ťah, prehrá.

a) Musí hra po konečnom počte ťahov vždy skončiť?
b) Existuje víťazná stratégia pre začínajúceho hráča?

17. Daný je lichobežník $ABCD$ s rovnobežnými stranami AB, CD, pričom $|AB| > |CD|$. Body K, L ležia postupne vnútri úsečiek AB, CD tak, že $|AK|/|KB| = |DL|/|LC|$. Body P, Q ležia vnútri úsečky KL, pričom

$$|\measuredangle APB| = |\measuredangle BCD| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle CQD| = |\measuredangle ABC|.$$

Dokážte, že body P, Q, B, C ležia na jednej kružnici.

18. Nech a, b, c, d sú kladné reálne čísla také, že

$$abcd = 1 \qquad \text{a} \qquad a+b+c+d > \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}.$$

Dokážte, že

$$a+b+c+d < \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}.$$